[東京大学 1998 年後期 $\boxed{1}$]

☆ ☆

xy 平面上の点 $\mathrm{P}_1 = (0, 10)$ を中心とし半径が 1 の円周 C_1 と，$\mathrm{P}_2 = (0, 0)$ を中心とし半径が 2 の円周 C_2 を与える。xy の平面上の 3 点 Q, R, S を頂点とし，角 $\angle$ QRS が直角になるような直角二等辺三角形△QRS に関して次の問いに答えよ。

(1) 点 Q が円周 C_1 を動き，点 R が円周 C_2 上を動くとき，第 3 の頂点 S が動いた軌跡を求めよ。

(2) さらに，直線 $x + 2y = 10$ の上にある点 P_3 を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円周 C_3 を与える。点 P_3 を適当にとったところ，頂点 Q, R, S がそれぞれ円周 C_1, C_2, C_3 上にあり，角 $\angle$ QRS が直角になるような直角二等辺三角形△QRS がただ一つだけ定まったという。このときの P_3 の座標を求めよ。

☆ ☆

[東京大学 1998 年後期 $\boxed{2}$]

パラメタ $r,\ \theta \left(r>0,\ 0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4} \right)$ に対して x の関数

$$f(x) = r\sin(x+\theta)$$

を考える。

(1) $r,\ \theta$ が等式

$$\int_0^{2\pi} (\sin x - f(x))^2\,dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx \qquad \cdots\cdots(\mathrm{E})$$

を満たしているとき，r を θ の関数として表せ。

(2) 式 (E) を満たしながら $r,\ \theta$ を動かしたとき，$0 \leqq x \leqq \pi$ における $y = f(x)$ のグラフは xy 平面上を動く。これらのグラフが動く範囲 D を求め，図示せよ。

(3) 図形 D の面積を求めよ。

[東京大学 1998 年後期 $\boxed{3}$]

グラフ $G=(V,\ W)$ とは有限個の頂点の集合 $V=\{\mathrm{P}_1,\ \cdots,\ \mathrm{P}_n\}$ とそれらの間を結ぶ辺の集合 $W=\{\mathrm{E}_1,\ \cdots,\ \mathrm{E}_m\}$ からなる図形とする。各辺 E_j は丁度 2 つの頂点 $\mathrm{P}_{i_1},\ \mathrm{P}_{i_2}$ $(i_1\neq i_2)$ を持つ。頂点以外での辺同士の交わりは考えない。さらに，各頂点には白か黒の色がついていると仮定する。

図1

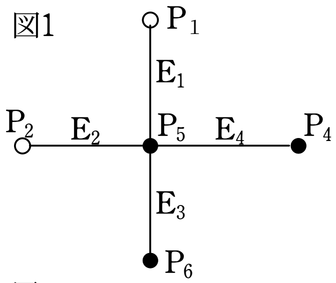


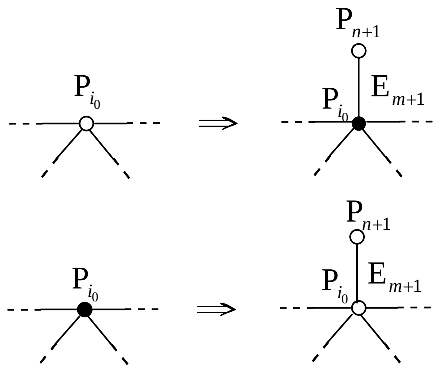
図2

例えば，図 1 のグラフは頂点が $n=5$ 個，辺が $m=4$ 個あり，辺 E_i $(i=1,\ \cdots,\ 4)$ の頂点は P_i と P_5 である。$\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2$ は白頂点であり， $\mathrm{P}_3,\ \mathrm{P}_4,\ \mathrm{P}_5$ は黒頂点である。

出発点とするグラフ G_1（図 2）は， $n=1,\ m=0$ であり，ただ 1 つの頂点は白頂点であるとする。

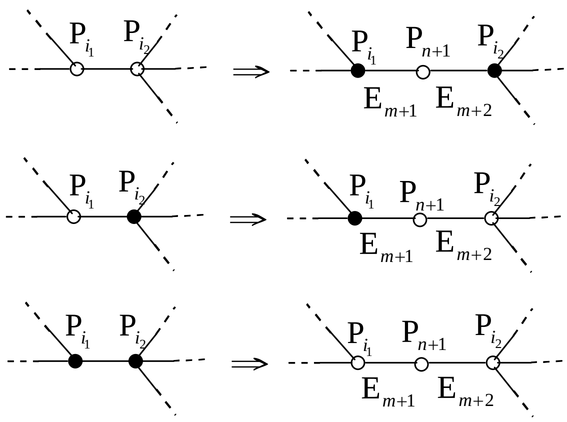
与えられたグラフ $G=(V,\ W)$ から新しいグラフ $G'=(V',\ W')$ を作る 2 種類の操作を以下で定義する。これらの操作では頂点と辺の数がそれぞれ 1 だけ増加する。

図3



（操作 1） この操作は G の頂点 P_{i_0} を 1 つ選ぶと定まる。V' は V に新しい頂点 P_{n+1} を加えたものとする。W' は W に新しい辺 E_{m+1} を加えたものとする。 E_{m+1} の頂点は P_{i_0} と P_{n+1} とし， G' のそれ以外の辺の頂点は G での対応する辺の頂点と同じとする。G において頂点 P_{i_0} の色が白又は黒ならば，G' における色はそれぞれ黒又は白に変化させる。それ以外の頂点の色は変化させない。また P_{n+1} は白頂点にする（図 3）。

図4

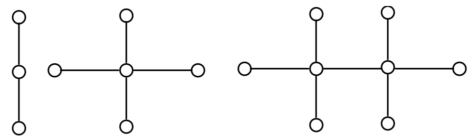


（操作 2） この操作は G の辺 E_{j_0} を 1 つ選ぶと定まる。V' は V に新しい頂点 P_{n+1} を加えたものとする。W' は W から E_{j_0} を取り去り，新しい辺 $\mathrm{E}_{m+1},\ \mathrm{E}_{m+2}$ を加えたものとする。E_{j_0} の頂点が P_{i_1} と P_{i_2} であるとき， E_{m+1} の頂点は P_{i_1} と P_{n+1} であり， E_{m+2} の頂点は P_{i_2} と P_{n+1} であるとする。G' のそれ以外の辺の頂点は G での対応する辺の頂点と同じとする。G において頂点 P_{i_1} の色が白又は黒ならば，G' における色はそれぞれ黒又は白に変化させる。 P_{i_2} についても同様に変化させる。それ以外の頂点の色は変化させない。また P_{n+1} は白頂点にする（図 4）。

出発点のグラフ G_1 にこれら 2 種類の操作を有限回繰り返し施して得られるグラフを可能グラフと呼ぶことにする。次の問いに答えよ。

(1) 図 5 の 3 つのグラフはすべて可能グラフであることを示せ。ここですべての頂点の色は白である。

図5



(2) n を自然数とするとき，n 個の頂点をもつ図 6 のような棒状グラフが可能グラフになるために n の満たすべき必要十分条件を求めよ。ここで，すべての頂点の色は白である。

図6