[東京大学 1998 年前期 理科 $\boxed{5}$]

x は $0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たす実数とする。xy 平面にベクトル

$$\vec{a} = (\cos\theta,\ \sin\theta),\ \vec{b} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

をとり，点 P_n, Q_n, $n = 1,\ 2,\ \cdots$ を

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OP}_1} = (1,\ 0) \\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}_n} = \overrightarrow{\mathrm{OP}_n} - \left(\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}\right)\vec{a} \\ \overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}} = 4\left\{\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n} - \left(\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}\right)\vec{b}\right\} \end{cases}$$

で定める。ただし，O は原点で，$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}$ および $\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}$ はベクトルの内積を表す。$\overrightarrow{\mathrm{OP}_n} = (x_n,\ y_n)$ とおく。数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ がともに収束する θ の範囲を求めよ。さらに，このような θ に対して，極限値

$$\lim_{n\to\infty} x_n,\quad \lim_{n\to\infty} y_n$$

を求めよ。