[東京大学 1998 年前期 理科 $\boxed{3}$]

xy 平面に 2 つの円

$$C_0 : x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \quad C_1 : (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

をとり，C_2 を x 軸と C_0, C_1 に接する円とする。さらに，$n = 2, 3, \cdots$ に対して C_{n+1} を x 軸と C_{n-1}, C_n に接する円で C_{n-2} とな異なるものとする。C_n の半径を r_n, C_n と x 軸との接点を $(x_n, 0)$ として，

$$q_n = \frac{1}{\sqrt{2r_n}}, \ p_n = q_n x_n$$

とおく。

(1) q_n は整数であることを示せ。

(2) p_n も整数で，p_n と q_n は互いに素であることを示せ。

(3) α を $\alpha = \dfrac{1}{1+\alpha}$ を満たす正の数として，不等式

$$|x_{n+1} - \alpha| < \frac{2}{3} < |x_n - \alpha|$$

を示し，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ。