[東京大学 1998 年前期 理科 $\boxed{1}$]

a は 0 でない実数とする。関数

$$f(x)=(3x^2-4)\left(x-a+\frac{1}{a}\right)$$

の極大値と極小値の差が最小となる a の値を求めよ。

$$f(x)=(3x^2-4)\left(x-a+\frac{1}{a}\right)=3x^3-3\left(a-\frac{1}{a}\right)x^2-4x+4\left(a-\frac{1}{a}\right)$$

$$f'(x)=9x^2-6\left(a-\frac{1}{a}\right)x-4=(3x-2a)\left(3x+\frac{2}{a}\right)$$

$f'(x)=0$ となるのは $x=\frac{2}{3}a,\ -\frac{2}{3a}$

$\frac{2}{3}a,\ -\frac{2}{3a}$ は異符号であるから $x=\frac{2}{3}a,\ -\frac{2}{3a}$ の前後で $f'(x)$ の符号は変わり極値をとる。

$f(x)$ の極大値と極小値の差を d とおくと

$$d=\left|f\left(\frac{2}{3}a\right)-f\left(-\frac{2}{3a}\right)\right|=\left|\int_{-\frac{2}{3a}}^{\frac{2}{3}a}f'(x)\,dx\right|=\left|\int_{-\frac{2}{3a}}^{\frac{2}{3}a}9\left(x-\frac{2}{3}a\right)\left(x+\frac{2}{3a}\right)dx\right|$$

$$=\left|\int_{-\frac{2}{3a}}^{\frac{2}{3}a}9\left(-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{2}{3}a-\left(-\frac{2}{3a}\right)\right)^3dx\right|=\frac{4}{9}\left|a+\frac{1}{a}\right|^3$$

$a,\ \frac{1}{a}$ は同符号なので

$$=\frac{4}{9}\left(|a|+\frac{1}{|a|}\right)^3\geqq\frac{4}{9}\left(2\sqrt{|a|\cdot\frac{1}{|a|}}\right)^3=\frac{4}{9}\cdot 8=\frac{32}{9}$$

等号は $|a|=\frac{1}{|a|}$ のとき。

$|a|=1$ より $a=\pm1$ のとき成立する。

このとき d は最小である。

[別解]

$a-\dfrac{1}{a}=A$ とおくと　$f(x)=(3x^2-4)\left(x-A\right)$

$f'(x)=6x\left(x-A\right)+(3x^2-4)$

$\quad=9x^2-6Ax-4$

$f'(x)=0$ は判別式 $D>0$ より，A の値に関係なく異なる 2 つの実数解をもつ。

その 2 解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと

解と係数の関係より　$\alpha+\beta=-\dfrac{-6A}{9}=\dfrac{2A}{3}$，$\alpha\beta=-\dfrac{4}{9}$

$y=f(x)$ は 3 次の係数が正の 3 次関数なので $x=\alpha$ で極大，$x=\beta$ で極小となる。

（極大値と極小値の差）$=f(\alpha)-f(\beta)$

$$=3(\alpha^3-\beta^3)-3A(\alpha^2-\beta^2)-4(\alpha-\beta)$$

$$=(\alpha-\beta)\left[3\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\}-3A(\alpha+\beta)-4\right]\cdots（＊）$$

であるが，$\alpha-\beta=-\dfrac{2\sqrt{9A^2+36}}{9}=-\dfrac{2\sqrt{A^2+4}}{3}$　より

$$（＊）=-\frac{2\sqrt{A^2+4}}{3}\left[3\left\{\left(\frac{2A}{3}\right)^2+\frac{4}{9}\right\}-3A\left(\frac{2A}{3}\right)-4\right]$$

$$=\frac{4(A^2+4)^{\frac{3}{2}}}{9}$$

ゆえに，極大値と極小値の差が最小となるのは　$A^2=\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2=0$　となるときで　$a=\pm1$

【注】--

$f(\alpha)-f(\beta)$ からは次のような変形に気づけばより早く処理できるかもしれない。

$$f(\alpha)-f(\beta)=\int_\beta^\alpha f'(x)\,dx=\int_\beta^\alpha 9(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=9\cdot\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{3}{2}\left\{(\beta-\alpha)^2\right\}^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\left\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\right\}^{\frac{3}{2}}=\frac{4(A^2+4)^{\frac{3}{2}}}{9}$$