[東京大学 1998 年前期 理科 $\boxed{1}$]

☆ ☆

a は 0 でない実数とする。関数

$$f(x)=(3x^2-4)\left(x-a+\frac{1}{a}\right)$$

の極大値と極小値の差が最小となる a の値を求めよ。

☆ ☆

[東京大学 1998 年前期 理科 $\boxed{2}$]

n を正の整数とする。連立不等式

$$\begin{cases} x+y+z \leqq n \\ -x+y-z \leqq n \\ x-y-z \leqq n \\ -x-y+z \leqq n \end{cases}$$

を満たす xyz 空間の点 $P(x,\ y,\ z)$ で，$x,\ y,\ z$ がすべて整数であるものの個数を $f(n)$ とおく。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^3}$$

を求めよ。

[東京大学 1998 年前期 理科 $\boxed{3}$]

xy 平面に 2 つの円

$$C_0 : x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4},\quad C_1 : (x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

をとり，C_2 を x 軸と C_0, C_1 に接する円とする。さらに，$n=2, 3, \cdots$ に対して C_{n+1} を x 軸と C_{n-1}, C_n に接する円で C_{n-2} とな異なるものとする。C_n の半径を r_n, C_n と x 軸との接点を $(x_n, 0)$ として，

$$q_n=\frac{1}{\sqrt{2r_n}},\ p_n=q_nx_n$$

とおく。

(1) q_n は整数であることを示せ。

(2) p_n も整数で，p_n と q_n は互いに素であることを示せ。

(3) α を $\alpha=\dfrac{1}{1+\alpha}$ を満たす正の数として，不等式

$$|x_{n+1}-\alpha|<\frac{2}{3}<|x_n-\alpha|$$

を示し，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$ を求めよ。

[東京大学 1998 年前期 理科 $\boxed{4}$]

実数 a に対して $k \leqq a < k+1$ を満たす整数 k を $[a]$ で表す。n を正の整数として,

$$f(x)=\frac{x^2(2\cdot3^3\cdot n-x)}{2^5\cdot3^3\cdot n^2}$$

とおく。$36n+1$ 個の整数

$$[f(0)],\ [f(1)],\ [f(2)],\ \cdots,\ [f(36n)]$$

のうち相異なるものの個数を n を用いて表せ。

[東京大学 1998 年前期 理科 $\boxed{5}$]

x は $0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たす実数とする。xy 平面にベクトル

$$\vec{a} = (\cos\theta,\ \sin\theta),\ \vec{b} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

をとり，点 P_n, Q_n, $n = 1,\ 2,\ \cdots$ を

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OP}_1} = (1,\ 0) \\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}_n} = \overrightarrow{\mathrm{OP}_n} - \left(\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}\right)\vec{a} \\ \overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}} = 4\left\{\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n} - \left(\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}\right)\vec{b}\right\} \end{cases}$$

で定める。ただし，O は原点で，$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}$ および $\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}$ はベクトルの内積を表す。$\overrightarrow{\mathrm{OP}_n} = (x_n,\ y_n)$ とおく。数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ がともに収束する θ の範囲を求めよ。さらに，このような θ に対して，極限値

$$\lim_{n\to\infty} x_n,\ \ \lim_{n\to\infty} y_n$$

を求めよ。

[東京大学 1998 年前期 理科 $\boxed{6}$]

☆ ☆

xyz 空間に 5 点 $A(1, 1, 0)$, $B(-1, 1, 0)$, $C(-1, -1, 0)$, $D(1, -1, 0)$, $P(0, 0, 3)$ をとる。四角錐 PABCD の

$$x^2 + y^2 \geqq 1$$

を満たす部分の体積を求めよ。

☆ ☆