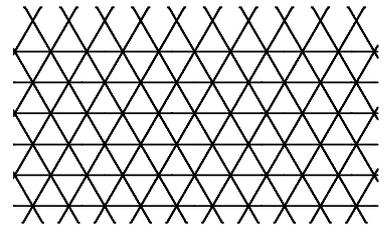




右の図のように，1 辺の長さが 1 の正三角形で，平面を分割する。  
 これらの 1 辺の長さが 1 の正三角形 1 つ 1 つを，単位正三角形とよぶ  
 ことにする。はじめに 1 個以上有限個の正三角形が塗りつぶされてい  
 るとし，以下の操作を繰り返すことにより，次々に単位正三角形を塗  
 りつぶしていく。



『1 回の操作ごとに，すでに塗りつぶされている単位正三角形と少なくとも 1 つの辺を共有する単位  
 正三角形を，すべて塗りつぶす』

次の問いに答えよ。

- (1) はじめに塗りつぶされている単位正三角形が 1 つだけのとき， $n$  回目の操作が終わったときに塗  
 りつぶされている単位正三角形の個数  $a_n$  を求めよ。
- (2) はじめに 2 個以上有限個の単位正三角形が塗りつぶされているとき， $n$  回目の操作が終わったと  
 きに塗りつぶされている単位正三角形の個数を  $b_n$  とおくと，極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$$

は，はじめの塗りつぶされ方がどのようなであっても存在するか。極限が存在する場合については，  
 その極限值を求めよ。存在しない場合があるならば，その例をあげよ。



[ 東京大学 1997 年後期 2 ]



座標平面上の点  $A(x, y)$  が次の連立不等式の表す領域を動くとする。

$$\begin{cases} |xy| < 1 \\ y > 0 \end{cases}$$

関数  $y = \frac{1}{|x|}$  のグラフのうち、 $x < 0$  の部分を  $H$ 、 $x > 0$  の部分を  $K$  とする。

点  $A$  に対し、 $x$  軸上の 2 点  $B, C$ 、曲線  $H$  上の点  $D$ 、曲線  $K$  上の点  $E$  を次の条件によって定める。

『直線  $AB$  は、2 点  $A, B$  の間の点  $D$  で曲線  $H$  に接し、直線  $AC$  は、2 点  $A, C$  の間の点  $E$  で曲線  $K$  に接する』

- (1) 三角形  $ABC$  の面積のとり得る範囲を求めよ。
- (2) 三角形  $ADE$  の面積のとり得る範囲を求めよ。





ボタンを 1 回押す毎に, 1 以上  $N$  以下の整数を, 同じ確率で 1 つずつ発生する機械がある。複数回ボタンを押した場合, どの整数が発生するかについての確率は, どの回においても他の回とお互いに独立であるとする。この機械には, 発生した整数の下 4 桁のみを表示する表示装置が接続されており, 4 桁未満の数については, 欠けている桁に 0 を入れて 4 桁にして表示される。たとえば, 発生した整数が 925 のときは 0925 が, 12320 のときは 2320 が表示される。

2 回ボタンを押したとき, 同じ数字が表示される確率を  $p_N$  とする。

- (1)  $p_{10000}$  を求めよ。
- (2)  $p_{10000}$  と  $p_{10001}$  は, どちらが大きいかを判断し, その差を有効数字 1 桁で答えよ。
- (3) 確率  $p_{10000}, p_{10001}, \dots, p_{20000}$  のうち, 最小の値を  $q$ , 最大の値を  $r$  とおく。  $q$  と  $r$  を求めよ。
- (4)  $N$  を 10000 以上の整数とするとき,  $q$   $p_N$   $r$  を示せ。

