[ 東京大学 1997 年前期 理科 $\boxed{1}$ ]

☆ ☆

$a, b$ を正の数とし，$xy$ 平面の 2 点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ および $\mathrm{B}(0,\ b)$ を頂点とする正三角形を ABC とする。ただし，C は第 1 象限の点とする。

(1) 三角形 ABC が正方形 $D=\{(x,\ y)\,|\,0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1\}$ に含まれるような $(a,\ b)$ の範囲を求めよ。

(2) $(a,\ b)$ が(1)の範囲を動くとき, 三角形 ABC の面積 $S$ が最大となるような $(a,\ b)$ を求めよ。また, そのときの $S$ の値を求めよ。

☆ ☆

[ 東京大学 1997 年前期 理科 $\boxed{2}$ ]

$n$ を正の整数，$a$ を実数とする。すべての整数 $m$ に対して

$$m^2-(a-1)m+\frac{n^2}{2n+1}a>0$$

が成り立つような $a$ の範囲を $n$ を用いて表せ。

[ 東京大学 1997 年前期 理科 $\boxed{3}$ ]

$r$ は $0 < r < 1$ を満たす実数とする。$xyz$ 空間に原点 O(0, 0, 0) と 2 点 A(1, 0, 0) , B(1, 0, 0) をとる。

(1) $xyz$ 空間の点 P で条件

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right| = r\left|\overrightarrow{\mathrm{PO}}\right|$$

を満たすものが存在するような $r$ の範囲を求めよ。

(2) 点 P が(1)の条件を満たして動くとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の最大値，最小値を $r$ の関数と考えてそれぞれ $M(r),\ m(r)$ で表す。このとき，左からの極限

$$\lim_{r\to 1-0}(1-r)^2\{M(r)-m(r)\}$$

を求めよ。

[ 東京大学 1997 年前期 理科 $\boxed{4}$ ]

正三角形ABCの頂点Aから辺ABとのなす角が$\theta$の方向に，三角形の内部に向かって出発した光線を考える。ただし$0^\circ < \theta < 60^\circ$とする。この光線は三角形の各辺で入射角と反射角が等しくなるように反射し，頂点に到達するとそこでとまるものとする。また，三角形の内部では光線は直進するものとする。

(1) $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ のとき，この光線はどの頂点に到達するかを述べよ。

(2) 正の整数$k$を用いて $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{6k+2}$ と表せるとき，この光線の到達する頂点を求め，またそこへ至るまでの反射の回数を$k$を用いて表せ。

［ 東京大学 1997 年前期 理科 $\boxed{5}$ ］

$a$ を $0 < a < \dfrac{1}{4}$ を満たす実数とする。$xy$ 平面で，不等式

$$y^2 \leqq x^2(1-x^2)-a$$

の表す領域を $y$ 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

☆ ☆

$a$ を実数とする。

(1) 曲線 $y=\dfrac{8}{27}x^3$ と放物線 $y=(x+a)^2$ の両方に接する直線が $x$ 軸以外に 2 本あるような $a$ の範囲を求めよ。

(2) $a$ が(1)の範囲にあるとき, この 2 本の接線と放物線 $y=(x+a)^2$ で囲まれた部分の面積 $S$ を $a$ を用いて表せ。

☆ ☆