[東京大学 1996 年前期 理科 $\boxed{1}$]

☆ ☆

xy 平面において，行列 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換を f とし，点 $(1,\ 0)$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{3}$ の円を C とする。 f による C の像が直線 $x=\dfrac{2}{3}$ に接し，かつ領域 $D=\{(x,\ y)\,|\,x>0\}$ に含まれるような $(a,\ b)$ 全体のなす図形を ab 平面に図示せよ。

☆ ☆

[東京大学 1996 年前期 理科 $\boxed{2}$]

$a,\ b,\ c,\ d$ を正の数とする。不等式 $\begin{cases} s(1-a)-tb>0 \\ -sc+t(1-d)>0 \end{cases}$

を同時に満たす正の数 $s,\ t$ があるとき，2 次方程式

$$x^2-(a+d)x+(ad-bc)=0$$

は $-1<x<1$ の間に異なる 2 つの実数解をもつことを示せ。

[東京大学 1996 年前期 理科 $\boxed{3}$]

空間内の点 O を中心とする一辺の長さが ℓ の立方体の頂点を A_1, A_2, ……, A_8 とする。
また，O を中心とする半径 r の球面を S とする。

(1) S 上のすべての点から A_1, A_2, ……, A_8 のうち少なくとも 1 点が見えるための必要十分条件を ℓ と r で表せ。

(2) S 上のすべての点から A_1, A_2, ……, A_8 のうち少なくとも 2 点が見えるための必要十分条件を ℓ と r で表せ。

ただし，S 上の点 P から A_k が見えるとは，A_k が S の外側にあり，線分 PA_k と S との共有点が P のみであることとする。

[東京大学 1996 年前期 理科 $\boxed{4}$]

1 つのサイコロを続けて投げて，それによって a_n $(n=1, 2, \cdots)$ を以下のように定める。

出た目の数を順に $c_1, c_2, \cdots\cdots$ とするとき，

$1 \leqq k \leqq n-1$ を満たすすべての整数 k に対し $c_k \leqq c_n$ ならば $a_n = c_n$，

それ以外のとき $a_n = 0$ とおく。ただし，$a_1 = c_1$ とする。

(1) a_n の期待値を $E(n)$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} E(n)$ を求めよ。

(2) $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ のうち, 2 に等しいものの個数の期待値を $N(n)$ とするとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} N(n)$ を求めよ。

[東京大学 1996 年前期 理科 $\boxed{5}$]

☆────────────────────☆

xyz 空間内の円柱 $x^2+y^2=R^2,\ R>0$ を側面とする容器に，水面が $z=0$ と一致するように $z \leqq 0$ の部分に水が入っている。

$z \geqq 0$ に対して定義された連続な関数 $r(z)$ で $r(0)=0,\ 0 \leqq r(z) < R$

をみたすものを考える。xz 平面内の不等式 $0 \leqq x \leqq r(z),\ z \geqq 0$

で表される領域を z 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を毎秒 1 の速さで下に動かすと，t 秒後には水面が $z=f(t)$ に上昇するという。

$t \geqq 0$ に対し，$f(t)=e^t-t-1$ であるとき，関数 $r(z)$ を決定せよ。

☆────────────────────☆

α, β を正の数とし，xy 平面において，楕円 $C : \dfrac{x^2}{\alpha} + \dfrac{\left(y - \sqrt{\beta}\right)^2}{\beta} = 1$

と領域 $D = \{(x,\ y) \mid x^2 + y^2 \leqq 1\}$ を考える。

(1) C が D に含まれるような点 $(\alpha,\ \beta)$ の範囲を求め，$\alpha\beta$ 平面上に図示せよ。

(2) 点 $(\alpha,\ \beta)$ が(1)で求めた範囲を動くとき，楕円 C の面積の最大値を求めよ。