

[ 東京大学 1996 年前期 文科 1 ]



$a$  を実数とする。行列  $X = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$  が  $X^2 - 2X + aE = O$  を満たすような実数  $x, y$  を求めよ。

ただし,  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  とする。



[ 東京大学 1996 年前期 文科 2 ]



$a, b, c, d$  を正の数とする。不等式 
$$\begin{cases} s(1-a) - tb > 0 \\ -sc + t(1-d) > 0 \end{cases}$$

を同時に満たす正の数  $s, t$  があるとき, 2 次方程式

$$x^2 - (a+d)x + (ad - bc) = 0$$

は  $-1 < x < 1$  の間に異なる 2 つの実数解をもつことを示せ。



[ 東京大学 1996 年前期 文科 3 ]



$xy$  平面上の点  $P(a, b)$  に対し, 正方形  $S(P)$  を連立不等式  $|x-a| \leq \frac{1}{2}, |y-b| \leq \frac{1}{2}$  の表す領域として定め, 原点と  $S(P)$  の点との距離の最小値を  $f(P)$  とする。点  $(2, 1)$  を中心とする半径 1 の円周上を  $P$  が動くとき,  $f(P)$  の最大値を求めよ。



[ 東京大学 1996 年前期 文科 4 ]



$xyz$  空間において, 点  $P$  を  $(1, 0, 1)$ , 点  $Q$  を  $(a, a+1, 0)$  とする。線分  $PQ$  を  $z$  軸のまわりに 1 回転して得られる曲面と平面  $z=1$  および  $xy$  平面で囲まれる部分の体積を  $V(a)$  とおく。 $a$  が実数全体を動くときの  $V(a)$  の最小値およびそれを与える  $a$  の値を求めよ。

