[東京大学 1995 年後期 $\boxed{1}$]

パスカルの三角形の第 n 行の部分和

$$\mathrm{P}_n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_{3k},\ \ \mathrm{Q}_n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_{3k+1},\ \ \mathrm{R}_n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_{3k+2}$$

として数列$\{\mathrm{P}_n\}$, $\{\mathrm{Q}_n\}$, $\{\mathrm{R}_n\}$を定義する。
ただし，$k>n$ のとき ${}_n\mathrm{C}_k=0$ とする。

(1) P_{n+1}, Q_{n+1}, R_{n+1} を P_n, Q_n, R_n で表せ。

(2) 一般項 P_n, Q_n, R_n を求めよ。

(3) P_{12}, Q_{12}, R_{12} を求めよ。

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

[東京大学 1995 年後期 $\boxed{2}$]

☆ ☆

平面上に 2 点 P, Q があり， P と Q の距離は 1 であるとする。このとき，次の（条件）を満たす三角形 ABC の面積 S の最大値を求めたい。

（条件）三角形 ABC は与えられた平面上にあり，各頂点 A, B, C から P までの距離または Q までの距離のうち，少なくとも一方は 1 以下である。

(1) P を中心とする半径 1 の円周を E, Q を中心とする半径 1 の円周を F とする。
上の（条件）の下で最大面積をもつ三角形の頂点 A, B, C はそれぞれ E または F の上にあることを示せ。

(2) この二つの頂点 A, B は円周 E 上にあるとして，この円の中心 P から弦 AB におろした垂線の長さを p とする。 p を固定したとき，（条件）を満たす三角形 ABC の面積 S が最大となるならば，直線 AB と直線 PQ は直交することを示せ。

(3) （条件）を満たす三角形 ABC の面積 S の最大値を求めよ。

☆ ☆

[東京大学 1995 年後期 $\boxed{3}$]

1 から 13 まで, それぞれ違った数字が書かれたカードが 1 枚ずつ 13 枚ある。このカードを使って, A と B の 2 人が次のルールでゲームをする。

○ A と B は最初に 2 枚ずつカードを持つ。相手のカードの数字は見えない。

○ まず, A が 1 枚のカードを数字が見えるようにして出し, B はそれを見て 1 枚のカードを出す。数字の大きいカードを出したものが 1 点を得る。

○ 次に, 残りのカードを出しあって, 数字の大きいカードを出したものが 1 点を得る。

○ この際, A と B はおのおのの得点が最大となるようにカードを出すものとする。

(1) カードが配られた後, A は手持ちのカードのうち, 数字の大きいものを最初に出した方が有利か, 不利か, あるいはどちらを出しても同じか。

(2) A, B に無作為に 2 枚ずつカードを配った場合, A の得る得点の期待値を求めよ。

(3) A はカードの数字の合計が 14 となるような 2 枚のカードを最初に選んで持っているものとする。B は残りのカードから無作為に 2 枚のカードを選んでゲームを行う。この場合, A ははじめにどのようにカードを選べば A の得る得点の期待値が最大となるか, また最小となるか。それぞれの得点の期待値を求めよ。