[東京大学 1995 年前期 理科 $\boxed{1}$]

すべての正の実数 $x,\ y$ に対し

$$\sqrt{x}+\sqrt{y} \leqq k\sqrt{2x+y}$$

が成り立つような実数 k の最小値を求めよ。

与えられた不等式は $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{2x+y}} \leqq k$ と変形できる。$z=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{2x+y}}$ とおく。

分母・分子を $\sqrt{y}$ で割ると $z=\dfrac{\sqrt{\dfrac{x}{y}}+1}{\sqrt{2\cdot\dfrac{x}{y}+1}}$ となり，$\dfrac{x}{y}=t$ とおくと $z=\dfrac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{2t+1}}$ である。

よって，任意の $t>0$ について $z \leqq k$ が成り立つ実数 k の最小値を求めればよい。

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\frac{1}{2}\cdot t^{-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{2t+1}-(\sqrt{t}+1)\cdot\frac{1}{2}(2t+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2}{2t+1}$$

$$=\frac{(2t+1)-2(\sqrt{t}+1)t^{\frac{1}{2}}}{2t^{\frac{1}{2}}(2t+1)(2t+1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=-\frac{2\sqrt{t}-1}{2\sqrt{t(2t+1)^3}}$$

$t>0$ における z の増減は下表に従う。

t	(0)	$\cdots$	$\dfrac{1}{4}$	$\cdots$
$\dfrac{dz}{dt}$		$+$	0	$-$
z		$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$	$\searrow$

z は $t=\dfrac{1}{4}$ のとき最大値 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ をとるので，求める k の最小値は $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ である。

〔別解〕

Cauchy – Schwarz の不等式：$(x_1y_1+x_2y_2)^2 \leqq (x_1{}^2+x_2{}^2)(y_1{}^2+y_2{}^2)$ において

$x_1=\sqrt{2x}$，$x_2=\sqrt{y}$，$y_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$y_2=1$ とすると

$$\left(\sqrt{2x}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{y}\cdot 1\right)^2 \leqq (2x+y)\left(\frac{1}{2}+1\right)$$

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 \leqq \frac{3}{2}(2x+y)$$

$$\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{2x+y} \leqq \frac{3}{2}$$

（等号成立は $\sqrt{2x}:\sqrt{y}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}:1$ つまり $x:y=1:4$ のとき）

$x,\ y$ は正の実数であるから両辺の平方根をとって $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{2x+y}} \leqq \sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

よって，求める k の最小値は $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$