［ 東京大学 1995 年前期 理科 $\boxed{1}$ ］

すべての正の実数 $x,\ y$ に対し

$$\sqrt{x}+\sqrt{y} \leqq k\sqrt{2x+y}$$

が成り立つような実数 k の最小値を求めよ。

[東京大学 1995 年前期 理科 $\boxed{2}$]

$f(x)=1-\sin x$ に対し，$g(x)=\int_0^x (x-t)f(t)\,dt$ とおく。

このとき，任意の実数 $x,\ y$ について

$$g(x+y)+g(x-y)\geqq 2g(x)$$

が成り立つことを示せ。

[東京大学 1995 年前期 理科 $\boxed{3}$]

☆ ☆

二辺の長さが 1 と 2 の長方形と一辺の長さが 2 の正方形の 2 種類のタイルがある。縦 2，横 n の長方形の部屋をこれらのタイルで過不足なく敷きつめることを考える。そのような並べ方の総数を A_n で表す。ただし n は正の整数である。たとえば $A_1 = 1$, $A_2 = 3$, $A_3 = 5$ であるこのとき以下の問いに答えよ。

(1) $n \geqq 3$ のとき，A_n を A_{n-1}, A_{n-2} を用いて表せ。

(2) A_n を n の式で表せ。

☆ ☆

[東京大学 1995 年前期 理科 $\boxed{4}$]

N を正の整数とする。N の正の約数 n に対し

$$f(n) = n + \frac{N}{n}$$

とおく。このとき，次の各 N に対して $f(n)$ の最小値を求めよ。

(1) $N = 2^k$，ただし k は正の整数

(2) $N = 7!$

[東京大学 1995 年前期 理科 $\boxed{5}$]

☆ ☆

サイコロを n 回投げて，xy 平面上の点 $\mathrm{P}_0,\ \mathrm{P}_1,\ \cdots,\ \mathrm{P}_n$ を次の規則(a)，(b) によって定める。

(a) $\mathrm{P}_0 = (0,\ 0)$

(b) $1 \leqq k \leqq n$ のとき，k 回目に出た目の数が 1，2，3，4 のときには，P_{k-1} をそれぞれ東，北，西，南に $\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$ だけ動かした点を P_k とする。また k 回目に出た目の数が 5, 6 のときには $\mathrm{P}_k = \mathrm{P}_{k-1}$ とする。ただし y 軸の正の向きを北と定める。このとき以下の問いに答えよ。

(1) P_n が x 軸上にあれば，$\mathrm{P}_0,\ \mathrm{P}_1,\ \cdots,\ \mathrm{P}_{n-1}$ もすべて x 軸上にあることを示せ。

(2) P_n が第 1 象限 $\{(x,\ y) \mid x > 0,\ y > 0\}$ にある確率を n で示せ。

☆ ☆

[東京大学 1995 年前期 理科 $\boxed{6}$]

☆ ☆

原点をOとする xy 平面上の双曲線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \ (a>0,\ b>0)$$

上の点Pにおける接線と2つの漸近線との交点をQ, Rとする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 三角形OQRの面積 S は，点Pのとり方にはよらず， $a,\ b$ によって定まることを示せ。

(2) $a=5e^{2t}+e^{-t},\ b=e^{2t}+e^{-t}$ として実数 t を変化させるときの S の最小値を求めよ。

☆ ☆