[東京大学 1995 年前期 文科 $\boxed{1}$]

すべての正の実数 $x,\ y$ に対し

$$\sqrt{x}+\sqrt{y} \leqq k\sqrt{2x+y}$$

が成り立つような実数 k の最小値を求めよ。

[東京大学 1995 年前期 文科 $\boxed{2}$]

☆ ☆

自然数 k に対し，xy 平面のベクトル

$$\vec{v}_k=\left(\cos\frac{k\pi}{4},\ \sin\frac{k\pi}{4}\right)$$

を考える。a, b を正の数とし，平面上の P_0, P_1, $\cdots$, P_8 を

$$\mathrm{P}_0=(0,\ 0)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_{2n}\mathrm{P}_{2n+1}}=a\vec{v}_{2n+1},\quad n=0,\ 1,\ 2,\ 3$$

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_{2n+1}\mathrm{P}_{2n+2}}=b\vec{v}_{2n+2},\quad n=0,\ 1,\ 2,\ 3$$

により定める。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $\mathrm{P}_8=\mathrm{P}_0$ であることを示せ。

(2) P_0, P_1, $\cdots$, P_8 を順に結んで得られる 8 角形の面積 S を a, b を用いて表せ。

(3) 面積 S が 7，線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_4$ の長さが $\sqrt{10}$ のとき，a, b の値を求めよ。

☆ ☆

[東京大学 1995 年前期 文科 $\boxed{3}$]

xy 平面において, 曲線 $y=-x^3+ax$ 上の $x>0$ の部分に, 点 P を次の条件を満たすようにとる。ただし, $a>0$ とする。

点 P におけるこの曲線の接線と y 軸との交点を Q とするとき,

原点 O における接戦が $\angle$QOP を二等分する。

このとき, $\triangle$QOP の面積 $S(a)$ の最小値とそれを与える a の値を求めよ。

[東京大学 1995 年前期 文科 $\boxed{4}$]

半径 1 cm の半球形の器が水平から角 θ だけ傾けて固定されている。ただし $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。この器に毎秒 $\dfrac{\pi}{18}$ cm^3 の割合で水を入れるとき，入れはじめてから $3+\cos^2\theta$ 秒後に器から水が流れ出した。このときの θ の値を求めよ。