[東京大学 1994 年前期 理科 $\boxed{4}$]

$0<c<1$ とする。$0\leqq c<1$ において連続な関数 $f(x)$ に対して

$$f_1(x)=f(x)+\int_0^c f(t)\,dt\ ,\ f_2(x)=f(x)+\int_0^c f_1(t)\,dt$$

とおく。以下, $f_3(x),\ f_4(x),\ \cdots\cdots$ を順次

$$f_n(x)=f(x)+\int_0^c f_{n-1}(t)\,dt\ \ (n=3,\ 4,\ \cdots)$$

により定める。また,

$$g(c)=\int_0^c f(t)\,dt\ \ \text{とし,}\ \ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots \text{に対し}\ \ g_n(c)=\int_0^c f_n(t)\,dt$$

とおく。このとき, $0<x<1$ を満たす任意の x に対し $x\,f(x)=g(x)+x\lim\limits_{n\to\infty}g_n(x)$ が成り立ち, さらに $f(0)=1$ となるような関数 $f(x)$ を求めよ。