[東京大学 1994 年前期 理科 $\boxed{1}$]

$$f(x)=x^4+x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{1}{24} \qquad g(x)=x^5+x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{24}x+\frac{1}{120}$$

とする。このとき，以下のことが成り立つことを示せ。

(1) 任意の実数 x に対し， $f(x)>0$ である。

(2) 方程式 $g(x)=0$ はただひとつの実数解 α をもち， $-1<\alpha<0$ となる。

[東京大学 1994 年前期 理科 $\boxed{2}$]

☆ ☆

$a=\sin^2\dfrac{\pi}{5},\ b=\sin^2\dfrac{2\pi}{5}$ とおく。このとき，以下のことが成り立つことを示せ。

(1) $a+b$ および ab は有理数である。

(2) 任意の自然数 n に対し $(a^{-n}+b^{-n})(a+b)^n$ は整数である。

☆ ☆

[東京大学 1994 年前期 理科 $\boxed{3}$]

☆ ☆

xyz 空間において条件

$$x^2+y^2 \leqq z^2,\ z^2 \leqq x,\ 0 \leqq z \leqq 1$$

を満たす点 $P(x,\ y,\ z)$ の全体からなる立体を考える。この立体の体積を V とし，$0 \leqq k \leqq 1$ に対し，z 軸と直交する平面 $z=k$ による切り口の面積を $S(k)$ とする。

(1) $k=\cos\theta$ とおくとき $S(k)$ を θ で表せ。ただし $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする。

(2) V の値を求めよ。

☆ ☆

[東京大学 1994 年前期 理科 $\boxed{4}$]

$0<c<1$ とする。$0\leqq c<1$ において連続な関数 $f(x)$ に対して

$$f_1(x)=f(x)+\int_0^c f(t)\,dt\ ,\ f_2(x)=f(x)+\int_0^c f_1(t)\,dt$$

とおく。以下，$f_3(x),\ f_4(x),\ \cdots\cdots$ を順次

$$f_n(x)=f(x)+\int_0^c f_{n-1}(t)\,dt\ \ (n=3,\ 4,\ \cdots)$$

により定める。また，

$$g(c)=\int_0^c f(t)\,dt \quad \text{とし，}\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots \text{に対し}\ \ g_n(c)=\int_0^c f_n(t)\,dt$$

とおく。このとき，$0<x<1$ を満たす任意の x に対し $x\,f(x)=g(x)+x\lim_{n\to\infty}g_n(x)$ が成り立ち，さらに $f(0)=1$ となるような関数 $f(x)$ を求めよ。

[東京大学 1994 年前期 理科 $\boxed{5}$]

大量のカードがあり，各々のカードに 1，2，3，4，5，6 の数字のいずれかの一つが書かれている。これらのカードから無作為に 1 枚をひくとき，どの数字のカードをひく確率も正である。さらに，3 のカードをひく確率は p であり，1，2，5，6 の数字のカードをひく確率はそれぞれ q に等しいとする。

これらのカードから 1 枚をひき，その数字 a を記録し，このカードをもとに戻して，もう 1 枚ひき，その数字を b とする。このとき，$a+b \leqq 4$ となる事象を A，$a<b$ となる事象を B とし，それぞれのおこる確率を $P(A)$，$P(B)$ と書く。

(1) $E=2P(A)+P(B)$ とおくとき，E を $p,\ q$ で表せ。

(2) $\dfrac{1}{p}$ と $\dfrac{1}{q}$ がともに自然数であるとき，E の値を最大にするような $p,\ q$ を求めよ。

[東京大学 1994 年前期 理科 $\boxed{6}$]

☆ ☆

xy 平面上の 2 点 P, Q に対し，P と Q を x 軸または y 軸に平行な線分からなる折れ線で結ぶときの経路の長さの最小値を $d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$ で表す。

(1) 原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ と点 $\mathrm{A}(1,\ 1)$ に対し，$d(\mathrm{O},\ \mathrm{P}) = d(\mathrm{P},\ \mathrm{A})$ を満たす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の範囲を xy 平面上に図示せよ。

(2) 実数 $a \geqq 0$ に対し，点 $\mathrm{Q}(a,\ a^2+1)$ を考える。
次の条件（＊）を満足する点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の範囲を xy 平面上に図示せよ。
（＊）原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ に対し，$d(\mathrm{O},\ \mathrm{P}) = d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$ となるような $a \geqq 0$ が存在する。

☆ ☆