[東京大学 1993 年前期 理科 $\boxed{1}$]

すべての面が合同な四面体 ABCD がある。頂点 A, B, C はそれぞれ x, y, z 軸上の正の部分にあり，辺の長さは $\mathrm{AB} = 2\ell - 1$, $\mathrm{BC} = 2\ell$, $\mathrm{CA} = 2\ell + 1$ $(\ell > 2)$ である。四面体 ABCD の体積を $V(\ell)$ とするとき，次の極限値を求めよ。 $\displaystyle\lim_{\ell \to 2} \frac{V(\ell)}{\sqrt{\ell - 2}}$

[東京大学 1993 年前期 理科 $\boxed{2}$]

整数からなる数列$\{a_n\}$を漸化式 $a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_{n+2} = 3a_{n+1} - 7a_n\ (n = 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ によって定める。

(1) a_n が偶数となることと，n が 3 の倍数になることは同値であることを示せ。

(2) a_n が 10 の倍数となるための条件を(1)と同様の形式で求めよ。

[東京大学 1993 年前期 理科 $\boxed{3}$]

☆ ☆

xy 平面内に次の二つの集合 ℓ, m を考える。

$$\ell = \{(-5,\ y) \mid -5 < y < 5\}\ ,\ m = \{(5,\ y) \mid -5 < y < 5\}$$

ℓ, m 上にない 2 点 A, B に対し, A, B を ℓ, m と交わらない線分又は折れ線で結ぶときの経路の長さの最小値を $d(\mathrm{A},\ \mathrm{B})$ で表す。

2 点 $\mathrm{P}(-9,\ -3)$, $\mathrm{Q}(9,\ 3)$ に対し $d(\mathrm{P},\ \mathrm{R}) = d(\mathrm{Q},\ \mathrm{R})$ となる点 R の軌跡を xy 平面上に図示せよ。

☆ ☆

[東京大学 1993 年前期 理科 $\boxed{4}$]

n を 2 以上の自然数とし $f(x) = x^n + px + q$ （p, q は実数）の形の n 次関数について積分 $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)^2\,dx$ を考える。I を最小にするような $(p,\ q)$ が唯一組存在することを示し，そのような $(p,\ q)$ と I の最小値を求めよ。

[東京大学 1993 年前期 理科 $\boxed{5}$]

☆ ☆

1 と 0 を 5 個並べた列 10110 をある人が繰り返し書き写すとする。ただしこの列を S で表し，これの第 1 回の写しを S_1 で表すとき，第 2 回目に書き写すときは S_1 を書き写す。S_1 の写しを S_2 とするとき，第 3 回目には S_2 を書き写す。以下同様に続ける。

この人が 0 を 1 に写し間違える確率は $p\ (0 < p < 1)$ であり，1 を 0 に写し間違える確率は $q\ \ (0 < q < 1)$ であるが，それ以外の間違いはないものとする。第 n 回目の写し S_n が S に一致する確率を $C(n)$ とするとき，$\lim_{n \to \infty} C(n)$ を求めよ。

☆ ☆

[東京大学 1993 年前期 理科 $\boxed{6}$]

☆ ☆

時刻tにおける座標が $x=2\cos t+\cos 2t,\ y=\sin 2t$ で表される xy 平面上の点 P の運動を考える。

(1) P の速さ，すなわち速度ベクトル $\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ の大きさの最大値と最小値を求めよ。

(2) t が $0 \leqq t < 2\pi$ の範囲を動く間に P が 2 回以上通過する点が唯一つ存在することを示し，その点を通過する各々の時刻での速度ベクトルを求め図示せよ。

☆ ☆