[東京大学 1992 年後期 $\boxed{1}$]

定数aに対して，曲線 $y=\sqrt{x^2-1}+\dfrac{a}{x}$ の$x \geqq 1$の部分を$C(a)$とおく。

(1) $C(a)$が直線$y=x$の下部$y<x$に含まれるような実数aの最大値a_0を求めよ。

(2) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$のとき，$C(a_0)$と 3 直線$y=x$, $x=1$, $x=\dfrac{1}{\cos\theta}$のよって囲まれる図形をx軸のまわりに回転させてできる立体Vの体積$V(\theta)$を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0} V(\theta)$ を求めよ。

[東京大学 1992 年後期 $\boxed{2}$]

(1) 空間内の直線 L を共通の境界線とし，角 θ で交わる 2 つの半平面 H_1, H_2 がある。H_1 上に点 A，L 上に点 B，H_2 上に点 C がそれぞれ固定されている。ただし，A, C は L 上にはないものとする。半平面 H_1 を，L を軸として，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で回転させる。このとき，θ が増加すると $\angle\mathrm{ABC}$ も増加することを証明せよ。

(2) 空間内の相異なる 4 点 A, B, C, D について，不等式

$$\angle\mathrm{ABC} + \angle\mathrm{BCD} + \angle\mathrm{CDA} + \angle\mathrm{DAB} \leqq 2\pi$$

が成り立つことを証明せよ。

ただし，角の単位はラジアンを用いる。

[東京大学 1992 年後期 $\boxed{3}$]

☆ ☆

多項式の列 $P_0(x)=0,\ P_1(x)=1,\ P_2(x)=1+x,\ \cdots\cdots,\ P_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}x^k,\ \cdots\cdots$ を考える。

(1) 正の整数 $n,\ m$ に対して，$P_n(x)$ を $P_m(x)$ で割った余りは $P_0(x),\ P_1(x),\ \cdots\cdots,\ P_{m-1}(x)$ のいずれかであることを証明せよ。

(2) 等式 $P_\ell(x)P_m(x^2)P_n(x^4)=P_{100}(x)$ が成立するような正の整数の組 $(\ell,\ m,\ n)$ をすべて求めよ。

☆ ☆