[東京大学 1992 年前期 理科 $\boxed{1}$]

a は 1 より大きい定数とし，xy 平面上の点 $(a,\ 0)$ を A，点 $(a,\ \log a)$ を B，曲線 $y=\log x$ と x 軸の交点を C とする。さらに x 軸，線分 BA および曲線 $y=\log x$ で囲まれた部分の面積を S_1 とする。

(1) $1 \leqq b \leqq a$ となる b に対し点 $(b,\ \log b)$ を D とする。四辺形 ABDC の面積 S_1 にもっとも近くなるような b の値と，そのときの四辺形 ABDC の面積 S_2 を求めよ。

(2) $a \to \infty$ のときの $\dfrac{S_2}{S_1}$ の極限値を求めよ。

[東京大学 1992 年前期 理科 $\boxed{2}$]

xy 平面において，x 座標，y 座標ともに整数であるような点を格子点と呼ぶ。格子点を頂点に持つ三角形 ABC を考える。

(1) 辺 AB, AC それぞれの上に両端を除いて奇数個の格子点があるとすると，辺 BC 上にも両端を除いて奇数個の格子点があることを示せ。

(2) 辺 AB, AC 上に両端を除いて丁度 3 点ずつ格子点が存在するとすると，三角形 ABC の面積は 8 で割り切れる整数であることを示せ。

[東京大学 1992 年前期 理科 $\boxed{3}$]

☆ ☆

a, b を正の実数とする。座標空間の 4 点 P(0, 0, 0), Q(a, 0, 0), R(0, 1, 0), S(0, 1, b) が半径 1 の同一球面上にあるとき，P, Q, R, S を頂点とする四面体に内接する球の半径を r とすれば，次の二つの不等式が成り立つことを示せ。

$$\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2 \geqq \frac{20}{3}, \qquad \frac{1}{r} \geqq 2\sqrt{\frac{2}{3}}+2\sqrt{\frac{5}{3}}$$

☆ ☆

[東京大学 1992 年前期 理科 $\boxed{4}$]

xyz 空間において，x 軸と平行な柱面

$$A=\{(x,\ y,\ z)\mid y^2+z^2=1,\ x,\ y,\ z \text{ は実数}\}$$

から，y 軸と平行な柱面

$$B=\{(x,\ y,\ z)\mid x^2-\sqrt{3}xz+z^2=\frac{1}{4},\ x,\ y,\ z \text{ は実数}\}$$

により囲まれる部分を切り抜いた残りの図形を C とする。図形 C の展開図をえがけ。
ただし，点 $(0, 1, 0)$ を通り x 軸と平行な直線に沿って C を切り開くものとする。

[東京大学 1992 年前期 理科 $\boxed{5}$]

xy 平面において，曲線 $y=\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{1}{2x}$ 上の点，$\left(1,\ \dfrac{2}{3}\right)$ を出発し，この曲線上を進む点 P がある。出発してから t 秒後の P の速度 $\vec{v}$ の大きさは $\dfrac{t}{2}$ に等しく，$\vec{v}$ の x 成分は常に正または 0 であるとする。

(1) 出発してから t 秒後の P の位置を $(x,\ y)$ として，x と t の間の関係式を求めよ。

(2) $\vec{v}$ がベクトル $(8,\ 15)$ と平行になるのは出発してから何秒後か。

[東京大学 1992 年前期 理科 $\boxed{6}$]

A,B の二人がじゃんけんをして，グーで勝てば 3 歩，チョキで勝てば 5 歩，パーで勝てば 6 歩進む遊びをしている。1 回のじゃんけんで A の進む歩数から B の進む歩数を引いた値の期待値を E とする。

(1) B がグー，チョキ，パーを出す確率がすべて等しいとする。A がどのような確率でグー，チョキ，パーを出すとき， E の値は最大になるか。

(2) B がグー，チョキ，パーを出す確率の比が $a:b:c$ であるとする。A がどのような確率でグー，チョキ，パーを出すならば，任意の a,b,c に対し， $E \geqq 0$ となるか。