[東京大学 1992 年前期 文科 $\boxed{1}$]

☆―――☆

x についての方程式 $px^2+(p^2-q)x-(2p-q-1)=0$ が解をもち，すべての解の実部が負となるような実数の組 $(p,\ q)$ の範囲を pq 平面上に図示せよ。

（注）複素数 $a+bi$ （$a,\ b$ は実数，i は虚数単位）に対し，a をこの複素数の実部という。

☆―――☆

[東京大学 1992 年前期 文科 $\boxed{1}$]

甲，乙二人が出資して共同事業を行う。二人の出資合計を s とするとき，この事業による利潤 $f(s)$ は

$$f(s)=\begin{cases} \dfrac{1}{4}s(s-3)^2 & (0\leqq s\leqq 4) \\ -\dfrac{3}{4}s+2 & (s>2) \end{cases}$$

で与えられ，利潤は出資額に応じて甲，乙に比例配分されるものとする。

甲の出資額 a が一定であるとして，乙の利潤配分額を最大にする s の値を求めよ。ただし $0\leqq a\leqq 2$ とする。

[東京大学 1992 年前期 文科 $\boxed{3}$]

☆ ☆

$p_1=1,\ p_2=1,\ p_{n+2}=p_n+p_{n+1}\ (n\geqq 1)$ によって定義される数列 $\{p_n\}$ をフィボナッチ数列といい，その一般項は

$$p_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

で与えられる。必要ならばこの事実を用いて，次の問いに答えよ。

各桁の数字が 0 か 1 であるような自然数の列 $X_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を次のように定める。

(ⅰ) $X_1=1$

(ⅱ) X_n のある桁の数字 α が 0 ならば α を 1 で置き換え，α が 1 ならば α を‘ 10 ’で置き換える。X_n の各桁ごとにこのような置き換えを行って得られる自然数を X_{n+1} とする。

たとえば， $X_1=1,\ X_2=10,\ X_3=101,\ X_4=10110,\ X_5=10110101,\ \cdots\cdots$ となる。

(1) X_n の桁数 a_n を求めよ。

(2) X_n の中に‘ 01 ’という配列が現れる回数 b_n を求めよ

（たとえば，$b_1=0,\ b_2=0,\ b_3=1,\ b_4=1,\ b_5=3,\ \cdots\cdots$）。

☆ ☆

[東京大学 1992 年前期 文科 $\boxed{4}$]

☆ ☆

xy 平面において，x 座標，y 座標ともに整数であるような点を格子点と呼ぶ。格子点を頂点に持つ三角形 ABC を考える。

(1) 辺 AB, AC それぞれの上に両端を除いて奇数個の格子点があるとすると，辺 BC 上にも両端を除いて奇数個の格子点があることを示せ。

(2) 辺 AB, AC 上に両端を除いて丁度 3 点ずつ格子点が存在するとすると，三角形 ABC の面積は 8 で割り切れる整数であることを示せ。

☆ ☆