[東京大学 1991 年前期 理科 $\boxed{1}$]

☆ ☆

平面上に正四面体が置いてある。平面と接している面の 3 辺のひとつを任意に選び，これを軸として正四面体をたおす。n 回の操作の後に，最初に平面と接していた面が再び平面と接する確率を求めよ。

☆ ☆

[東京大学 1991 年前期 理科 $\boxed{2}$]

$a,\ b,\ c$ を正の実数とする。xyz 空間において，$|x| \leqq a,\ |y| \leqq b,\ z = c$ を満たす点 $(x,\ y,\ z)$ からなる板 R を考える。点光源 P が平面 $z = c+1$ 上の楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ z = c+1$ の上を一周するとき, 光が板 R にさえぎられて xy 平面上にできる影の通過する部分の図をえがき, その面積を求めよ。

[東京大学 1991 年前期 理科 $\boxed{2}$]

定数 p に対して，3 次方程式 $x^3-3x-p=0$ の実数解の中で最大のものと最小のものとの積を $f(p)$ とする。ただし，実数解がただひとつのときには，その 2 乗を $f(p)$ とする。

(1) p がすべての実数を動くとき，$f(p)$ の最小値を求めよ。

(2) p の関数 $f(p)$ の概形をえがけ。

[東京大学 1991 年前期 理科 $\boxed{4}$]

(1) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して，ある多項式 $p_n(x),\ q_n(x)$ が存在して，

$$\sin n\theta = p_n(\tan\theta)\cos^n\theta\ ,\ \cos n\theta = q_n(\tan\theta)\cos^n\theta$$

と書けることを示せ。

(2) このとき，$n>1$ ならば次の等式が成立することを証明せよ。

$$p_n{'}(x) = nq_{n-1}(x)\ ,\ q_n{'}(x) = -np_{n-1}(x)$$

[東京大学 1991 年前期 理科 $\boxed{5}$]

xy 平面上，x 座標，y 座標がともに整数であるような点 $(m,\ n)$ を格子点とよぶ。各格子点を中心として半径 r の円がえがかれており, 傾き $\dfrac{2}{5}$ の任意の直線はこれらの円のどれかと共有点をもつという。このような性質をもつという。このような性質をもつ実数 r の最小値を求めよ。

[東京大学 1991 年前期 理科 $\boxed{6}$]

$f(x)$ は $x>0$ で定義された連続な関数で，$0<x_1<x_2$ ならば，つねに $f(x_1)>f(x_2)>0$ であるものとし，$S(x)=\int_x^{2x} f(t)\,dt$ とおく。このとき，$S(1)=1$ であり，さらに任意の $a>0$ に対して，原点と点 $(a,\ f(a))$，原点と点 $(2a,\ f(2a))$ を結ぶ 2 直線と曲線 $y=f(x)$ とで囲まれる部分の面積は $3S(a)$ に等しいものとする。

(1) $S(x),\ f(x)-2f(2x)$ をそれぞれ x の関数として表せ。

(2) $x>0$ に対して，$a(x)=\lim_{n\to\infty} 2^n f(2^n x)$ とおく。積分 $\int_x^{2x} a(t)\,dt$ の値を求めよ。

(3) 関数 $f(x)$ を決定せよ。