[東京工業大学 2022 年前期 $\boxed{5}$]

a は $0<a\leqq\dfrac{\pi}{4}$ を満たす実数とし， $f(x)=\dfrac{4}{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+ax\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-ax\right)$ とする。

このとき，次の問いに答えよ。

(1) 次の等式（∗）を満たす a がただ 1 つ存在することを示せ。

（∗）　$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=1$

(2) $0\leqq b<c\leqq 1$ を満たす実数 $b,\ c$ について，不等式

$$f(x)(c-b)\leqq\int_b^c f(x)dx\leqq f(c)(c-b)$$

が成り立つことを示せ。

(3) 次の試行を考える。

［試行］n 個の数$1,\ 2,\ \cdots,\ n$ を出目とする，あるルーレットを k 回まわす。

この［試行］において，各 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ について i が出た回数を $S_{n,\,k,\,i}$ とし，

（∗∗）　$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{S_{n,\,k,\,i}}{k}=\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)dx$

が成り立つとする。このとき，(1)の等式が成り立つことを示せ。

(4) (3)の試行において出た数の平均値を $A_{n,\,k}$ とし， $A_n=\displaystyle\lim_{k\to\infty}A_{n,\,k}$ とする。

（∗∗）が成り立つとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{n}$ を a を用いて表せ。