[東京工業大学 2022 年前期 $\boxed{1}$]

$a,\ b$ を実数とし， $f(z)=z^2+az+b$ とする。$a,\ b$ が

$|a|\leqq 1,\ |b|\leqq 1$

を満たしながら動くとき， $f(z)=0$ を満たす複素数 z がとりうる値の範囲を複素数平面に図示せよ。

[東京工業大学 2022 年前期 $\boxed{2}$]

☆ ☆

3つの正の整数 a, b, c の最大公約数が1であるとき，次の問いに答えよ。

(1) $a+b+c,\ bc+ca+ab,\ abc$ の最大公約数は1であることを示せ。

(2) $a+b+c,\ a^2+b^2+c^2,\ a^3+b^3+c^3$ の最大公約数となるような正の整数をすべて求めよ。

☆ ☆

[東京工業大学 2022 年前期 $\boxed{3}$]

☆―――☆

α は $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数とする。$\angle \mathrm{A}=\alpha$ および $\angle \mathrm{P}=\dfrac{\pi}{2}$ を満たす直角三角形 APB が，次の 2 つの条件 (a)，(b) を満たしながら，時刻 $t=0$ から $t=\dfrac{\pi}{2}$ まで xy 平面を動くとする。

(a) 時刻 t での A, B の座標は $\mathrm{A}(\sin t,\ 0),\ \mathrm{B}(0,\ \cos t)$ である。

(b) 点 P は第一象限内にある。

このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 P はある直線上を動くことを示し，その直線の方程式を α を用いて表せ。

(2) 時刻 $t=0$ から時刻 $t=\dfrac{\pi}{2}$ までに間に点 P が動く道のりを α を用いて表せ。

(3) xy 平面内において，連立不等式

$$x^2-x+y^2<0,\ \ x^2+y^2-y<0$$

により定まる領域を D とする。このとき，点 P は領域 D には入らないことを示せ。

☆―――☆

[東京工業大学 2022 年前期 $\boxed{4}$]

a は正の実数とする。複素数 z が $|z-1|=a$ かつ $z \neq \frac{1}{2}$ を満たしながら動くとき，複素数平面上の点 $w=\frac{z-3}{1-2z}$ が描く図形を K とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) K が円となるための a の条件を求めよ。

また，そのときの K の中心が表す複素数と K の半径を，それぞれ a を用いて表せ。

(2) a が(1)の条件を満たしながら動くとき，虚軸に平行で円 K の直径となる線分が通過する領域を複素数平面上に図示せよ。

[東京工業大学 2022 年前期 $\boxed{5}$]

a は $0 < a \leqq \dfrac{\pi}{4}$ を満たす実数とし， $f(x) = \dfrac{4}{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + ax\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - ax\right)$ とする。

このとき，次の問いに答えよ。

(1) 次の等式（＊）を満たす a がただ 1 つ存在することを示せ。

（＊）　$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 1$

(2) $0 \leqq b < c \leqq 1$ を満たす実数 $b,\ c$ について，不等式

$$f(x)(c-b) \leqq \int_b^c f(x)dx \leqq f(c)(c-b)$$

が成り立つことを示せ。

(3) 次の試行を考える。

［試行］ n 個の数 $1,\ 2,\ \cdots,\ n$ を出目とする，あるルーレットを k 回まわす。

この［試行］において，各 $i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ について i が出た回数を $S_{n,\,k,\,i}$ とし，

（＊＊）　$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{S_{n,\,k,\,i}}{k} = \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)dx$

が成り立つとする。このとき，(1)の等式が成り立つことを示せ。

(4) (3)の試行において出た数の平均値を $A_{n,\,k}$ とし， $A_n = \displaystyle\lim_{k\to\infty} A_{n,\,k}$ とする。

（＊＊）が成り立つとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{n}$ を a を用いて表せ。