[東京工業大学 2021 年前期 $\boxed{1}$]

☆ ☆

正の整数に関する条件

（∗）10進法で表したときに，どの位にも数字9が現れない

を考える。以下の問いに答えよ。

(1) k を正の整数とするとき，10^{k-1} 以上かつ 10^k 未満であって条件（∗）を満たす正の整数の個数を a_k とする。このとき，a_k を k の式で表せ。

(2) 正の整数 n に対して，

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & (n\text{が条件}(*)\text{を満たすとき}) \\ 0 & (n\text{が条件}(*)\text{を満たさないとき}) \end{cases}$$

とおく。このとき，すべての正の整数 k に対して次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{n=1}^{10^k-1} b_n < 80$$

☆ ☆

(1) 10^{k-1} 以上かつ 10^k 未満の整数は，k 桁の整数である。

このうち，（∗）を満たすものは

最高位の数字は 1 から 8 までの 8 通り，それ以外の $k-1$ 桁の数字は 0～8 の 9 通り

の選び方がある。

よって，$a_k = 8\cdot 9^{k-1}$

(2) m を整数とし，$S_m = \displaystyle\sum_{n=10^{m-1}}^{10^m-1} b_n$ とおく。

m 桁の整数である $10^{m-1} \leqq n < 10^m$ の範囲の整数 n について

$\dfrac{1}{10^m} < \dfrac{1}{n} \leqq \dfrac{1}{10^{m-1}}$ であるから，(1)より $S_m \leqq \dfrac{a_m}{10^{m-1}} = \dfrac{8\cdot 9^{m-1}}{10^{m-1}}$

となる。

よって

$$\sum_{n=1}^{10^k-1} b_n = \sum_{m=1}^{k} \frac{8 \cdot 9^{m-1}}{10^{m-1}} = 8\sum_{m=1}^{k} \left(\frac{9}{10}\right)^{m-1} = 8 \cdot \frac{1-\left(\frac{9}{10}\right)^k}{1-\frac{9}{10}} = 80\left\{1-\left(\frac{9}{10}\right)^k\right\} < 80$$

となり，示された。

［ 東京工業大学 2021 年前期 $\boxed{2}$ ］

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

xy 平面上の楕円

$$E: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

について，以下の問いに答えよ。

(1)　a, b を実数とする。直線 $\ell: y = ax + b$ と楕円 E が異なる 2 点を共有するための a, b の条件を求めよ。

(2)　実数 a, b, c に対して，直線 $\ell: y = ax + b$ と直線 $m: y = ax + c$ が，それぞれ楕円 E と異なる 2 点を共有しているとする。ただし，$b > c$ とする。

直線 ℓ と楕円 E の 2 つの共有点のうち x 座標の小さい方を P，大きい方を Q とする。

また，直線 m と楕円 E の 2 つの共有点のうち x 座標の小さい方を S，大きい方を R とする。

このとき，等式

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{SR}}$$

が成り立つための a, b, c の条件を求めよ。

(3)　楕円 E 上の 4 点の組で，それらを 4 頂点とする四角形が正方形であるものをすべて求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1)　$E: \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ と $\ell: y = ax + b$ から y を消去すると

$$x^2 + 4(ax+b)^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad (4a^2+1)x^2 + 8abx + 4(b^2-1) = 0$$

解の公式により

$$x = \frac{-4ab \pm \sqrt{16a^2b^2 - (4a^2+1)\cdot 4(b^2-1)}}{4a^2+1}$$

$$= \frac{-4ab \pm 2\sqrt{4a^2 - b^2 + 1}}{4a^2+1} \quad \cdots①$$

E と ℓ が異なる 2 点を共有するとき，①の $\sqrt{\quad}$ の中は正となるから

求める条件は　$4a^2 - b^2 + 1 > 0$　つまり　$b^2 < 4a^2 + 1$

(2)　PQとSRの傾きはともにaであるから常に平行である。

よって，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{SR}}$ が成り立つのは，

P, Qのx座標の差とS, Rのx座標の差が等しいときである。

P, Qのx座標の差は①より　$\dfrac{4\sqrt{4a^2-b^2+1}}{4a^2+1}$

S, Rのx座標の差は同様にして　$\dfrac{4\sqrt{4a^2-c^2+1}}{4a^2+1}$

であるから，求める条件は $b^2=c^2$ かつ $b>c$ である。

したがって，(1)の結果を踏まえて求める条件は

$b^2<4a^2+1$ かつ $b=-c$ かつ $b>0$

(3)　楕円E上の四角形PQRSが正方形であるためには，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{SR}}$ となることが必要である。

このとき，(2)より $b=-c$ であるから，PとR，QとSは原点対称の位置にある。

さらに，四角形PQRSが正方形であるとき，$\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}$ かつ $\mathrm{OP}\perp\mathrm{OQ}$ であるから

4点の座標は $u,\ v\geqq 0$ を用いてそれぞれ $(u,\ v),\ (v,\ -u),\ (-v,\ u),\ (-u,\ -v)$ とおける。

これらが楕円E上にあることから

$\dfrac{u^2}{4}+v^2=1$ かつ $\dfrac{v^2}{4}+u^2=1$

これを解くと，$u=v=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

したがって，求める4頂点は

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right),\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right),\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

[東京工業大学 2021 年前期 $\boxed{3}$]

以下の問いに答えよ。

(1) 正の整数 n に対して，二項係数に関する次の等式を示せ。

$$n\,{}_{2n}\mathrm{C}_n=(n+1)\,{}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}$$

また，これを用いて ${}_{2n}\mathrm{C}_n$ は $n+1$ の倍数であることを示せ。

(2) 正の整数 n に対して，

$$a_n=\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}$$

とおく。このとき，$n\geqq 4$ ならば $a_n>n+2$ であることを示せ。

(3) a_n が素数となる正の整数 n をすべて求めよ。

---

(1) $n\,{}_{2n}\mathrm{C}_n=n\cdot\dfrac{(2n)!}{n!n!}=\dfrac{(2n)!}{(n-1)!n!}=(n+1)\cdot\dfrac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}=(n+1)_{2n}\mathrm{C}_{n-1}$ となる。

また，${}_{2n}\mathrm{C}_n$，${}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}$ はともに整数であり，n と $n+1$ は互いに素であるから

${}_{2n}\mathrm{C}_n$ は $n+1$ の倍数である。

(2) 数学的帰納法により示す。

(Ⅰ) $n=4$ のとき

$a_4=\dfrac{{}_8\mathrm{C}_4}{5}=14>6$ より成り立つ。

(Ⅱ) $n=k$ ($k\geqq 4$) のとき，$a_k>k+2$ …① が成り立つとする。

ここで，

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{{}_{2(n+1)}\mathrm{C}_{n+1}}{n+2}\cdot\frac{n+1}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}=\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}\cdot\frac{n!n!}{(2n)!}$$
$$=\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{(2n+2)(2n+1)\cdot(2n)!}{(n+1)\cdot n!\cdot(n+1)\cdot n!}\cdot\frac{n!n!}{(2n)!}=\frac{2(2n+1)}{n+2}$$

より $a_{n+1}=\dfrac{2(2n+1)}{n+2}a_n$ …② である。

$a_{k+1}-(k+3)=\dfrac{2(2k+1)}{k+2}a_k-(k+3)$ (②より)

$$> \frac{2(2k+1)}{k+2}\cdot(k+2)-(k+3) \quad （①より）$$

$$= 4k+2-(k+3)$$

$$= 3k-1$$

よって，$k \geqq 4$ のとき，$a_{k+1}-\left(k+3\right)>0$ であるから，$n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

したがって，数学的帰納法により題意は成り立つ。

〔別解〕

$n \geqq 4$ のとき

$$a_n = \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{2n(2n-1)\cdots\cdots(n+2)}{n!} = \frac{(2n-1)\cdots\cdots(n+2)}{(n-1)\cdots\cdots 3}$$

$$= \frac{(2n-1)\cdots\cdots(n+3)}{(n-1)\cdots\cdots 3}\cdot(n+2) = \frac{2n-1}{n-1}\cdots\cdots\frac{n+3}{3}\cdot(n+2) > \left(\frac{n+3}{n-1}\right)^{n-3}(n+2) > n+2$$

(3)　$a_1 = \frac{{}_2\mathrm{C}_1}{2} = 1$，$a_2 = \frac{{}_4\mathrm{C}_2}{3} = 2$，$a_3 = \frac{{}_6\mathrm{C}_3}{4} = 5$，$a_4 = \frac{{}_8\mathrm{C}_4}{5} = 14$ である。

次に，$n \geqq 4$ に対し，a_n が素数にならないことを示す。

②より $a_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2}a_n$ であり，

a_{n+1} が素数であると仮定すると a_n または $2(2n+1)$ が素因数 a_{n+1} をもつことになる。

まず，②より $a_{n+1} > a_n$ であるから，a_n は素因数 a_{n+1} をもたない。

次に，$a_n > n+2$ より $a_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2}a_n > \frac{2(2n+1)}{n+2}\cdot(n+2) = 2(2n+1)$ であるから，

$2(2n+1)$ も素因数 a_{n+1} をもたない。

よって，a_{n+1} は素数にならない。

したがって，a_n が素数となる正の整数 n は $n=2, 3$

[東京工業大学 2021 年前期 $\boxed{4}$]

S を，座標空間内の原点 O を中心とする半径1の球面とする。S 上を動く点 A, B, C, D に対して

$$F = 2\left(\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2\right) - 3\left(\mathrm{AD}^2 + \mathrm{BD}^2 + \mathrm{CD}^2\right)$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c},\ \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \vec{d}$ とするとき，$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c},\ \vec{d}$ によらない定数 k によって

$$F = k\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-3\vec{d}\right)$$

と書けることを示し，定数 k を求めよ。

(2)　点 A, B, C, D が球面 S 上を動くときの，F の最大値 M を求めよ。

(3)　点 C の座標が $\left(-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{\sqrt{15}}{4},\ 0\right)$，点 D の座標が $(1,\ 0,\ 0)$ であるとき，

$F = M$ となる S 上の点 A, B の組をすべて求めよ。

---

(1)　A, B, C, D は半径 1 の球面上にあるから

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}| = 1$$

また，$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{x}$　とおくと

$$F = 2\left(|\vec{b}-\vec{a}|^2 + |\vec{c}-\vec{b}|^2 + |\vec{a}-\vec{c}|^2\right) - 3\left(|\vec{d}-\vec{a}|^2 + |\vec{d}-\vec{b}|^2 + |\vec{d}-\vec{c}|^2\right)$$

$$= 2\left(6 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} - 2\vec{b}\cdot\vec{c} - 2\vec{c}\cdot\vec{a}\right) - 3\left(6 - 2\vec{a}\cdot\vec{d} - 2\vec{b}\cdot\vec{d} - 2\vec{c}\cdot\vec{d}\right)$$

$$= 12 - 2\left(|\vec{x}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}| - |\vec{c}|^2\right) - 18 + 6\vec{x}\cdot\vec{d}$$

$$= 12 - 2\left(|\vec{x}|^2 - 3\right) - 18 + 6\vec{x}\cdot\vec{d}$$

$$= -2|\vec{x}|^2 + 6\vec{x}\cdot\vec{d}$$

$$= -2\vec{x}\left(\vec{x} - 3\vec{d}\right) \quad \cdots①$$

よって，$k = -2$　として題意は満たされる。

(2)　①より

$$F=-2|\vec{x}|^2+6\vec{x}\cdot\vec{d}=-2\left(|\vec{x}|^2-3\vec{x}\cdot\vec{d}\right)=-2\left(\left|\vec{x}-\frac{3}{2}\vec{d}\right|^2-\frac{9}{4}|\vec{d}|^2\right)=-2\left|\vec{x}-\frac{3}{2}\vec{d}\right|^2+\frac{9}{2}$$

よって，$F\leqq\dfrac{9}{2}$ であり，最大値として $M=\dfrac{9}{2}$ が実現することは(3)で示す。

(3)　(2)より，$F=\dfrac{9}{2}$ のとき $\vec{x}=\dfrac{3}{2}\vec{d}$ である。

よって $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\dfrac{3}{2}\vec{d}$ より

$$\vec{a}+\vec{b}=\frac{3}{2}\vec{d}-\vec{c}=\left(\frac{3}{2},\ 0,\ 0\right)-\left(-\frac{1}{4},\ \frac{\sqrt{15}}{4},\ 0\right)=\left(\frac{7}{4},\ -\frac{\sqrt{15}}{4},\ 0\right)$$

である。ここで，ABの中点をNとすると

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})=\left(\frac{7}{8},\ -\frac{\sqrt{15}}{8},\ 0\right)$$

となり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{ON}}|^2=\left(\frac{7}{8}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{15}}{8}\right)^2+0^2=\frac{49+15}{64}=1$$

であるから，A, B, N はすべて S 上にある。

球面上のA, Bの中点Nが球面上にあるということは，

A, B, N がすべて一致することを意味する。

よって，$\mathrm{A}\left(\dfrac{7}{8},\ -\dfrac{\sqrt{15}}{8},\ 0\right)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{7}{8},\ -\dfrac{\sqrt{15}}{8},\ 0\right)$

［ 東京工業大学 2021 年前期 $\boxed{5}$ ］

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

xy 平面上の円 $C: x^2+(y-a)^2=a^2$ （ $a>0$ ）を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　円 C が $y \geqq x^2$ で表される領域に含まれるための a の範囲を求めよ。

(2)　円 C が $y \geqq x^2 - x^4$ で表される領域に含まれるための a の範囲を求めよ。

(3)　a が(2)の範囲にあるとする。xy 平面において連立不等式

$$|x| \leqq \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0 \leqq y \leqq \frac{1}{4},\ y \geqq x^2 - x^4,\ x^2+(y-a)^2 \geqq a^2$$

で表される領域 D を，y 軸の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1)　円 C の中心を A とし，$y=x^2$ 上の点を $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ とする。

円 C が $y \geqq x^2$ で表される領域に含まれるための条件は，

すべての t に対して　$\mathrm{AP} \geqq a$　となることである。

よって，$a>0$ のもとで両辺を 2 乗して

$$\mathrm{AP}^2 \geqq a^2 \quad \Leftrightarrow \quad t^2+(t-a)^2 \geqq a^2$$

$$\Leftrightarrow \quad t^2\{t^2-(2a-1)\} \geqq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad t^2 \geqq 2a-1$$

これがすべての t に対して成り立つ条件は

$$2a-1 \leqq 0$$

であるから，求める a の値の範囲は　$0<a \leqq \dfrac{1}{2}$

(2)　$y=x^2-x^4$ 上の点を $\mathrm{Q}(t,\ t^2-t^4)$ とする。

円 C が $y \geqq x^2-x^4$ で表される領域に含まれるための条件は，

すべての t に対して $\mathrm{AQ} \geqq a$ となることである。

よって，$a>0$ のもとで両辺を 2 乗して

$$\mathrm{AQ}^2 \geqq a^2 \quad \Leftrightarrow \quad t^2+(t^2-t^4-a)^2 \geqq a^2$$

$$\Leftrightarrow \quad t^2\left\{t^6-2t^4+(2a+1)t^2-(2a-1)\right\} \geqq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad t^6-2t^4+(2a+1)t^2-(2a-1) \geqq 0 \quad \cdots①$$

これがすべての t に対して成り立つ条件を考える。

まず，①の左辺を $f(t)$ とおくと，

$f(0)<0$ である場合には，0 に十分近い t に対して $f(t)<0$ となってしまうので

$f(0)=-(2a-1) \geqq 0$ であることが必要である。

よって，$0<a \leqq \dfrac{1}{2}$ であることが必要である。

逆にこのとき，すべての実数 x に対して不等式 $x^2 \geqq x^2-x^4$ が成り立つので，

$y \geqq x^2$ で表される領域は，$y \geqq x^2-x^4$ で表される領域に含まれている。

よって，(1)より $0<a \leqq \dfrac{1}{2}$ のときは，円 C は必ず $y \geqq x^2-x^4$ で表される領域にも含まれる。

よって，求める a の値の範囲は $0<a \leqq \dfrac{1}{2}$

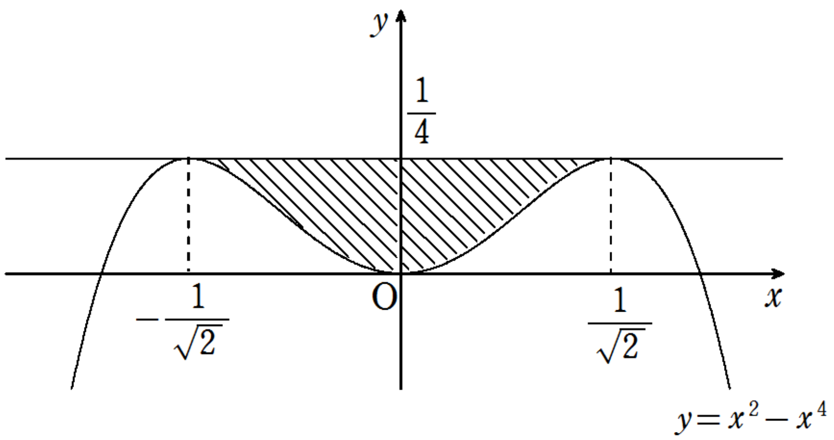
(3)　$g(x)=x^2-x^4$　とおく。

$g'(x)=2x-4x^3=2x(1-2x^2)$　と $y=g(x)$ が偶関数であることから，

$x \geqq 0$ における $g(x)$ の増減は下表に従う。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g(x)$	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘

よって，$y=x^2-x^4$ のグラフの概形は次の図のようになる。



上図の斜線部分を D とし，D を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V_1 とする。

立体を $y=t$ $\left(0 \leqq t \leqq \frac{1}{4}\right)$ で切断したときの断面は円であり，

その面積 $S(t)$ は $t=x^2-x^4$ を満たす x に対し，$S(t)=\pi x^2$ である。

また，$dt=(2x-4x^3)dx$ であり，$t:0 \to \frac{1}{4}$ のとき $x:0 \to \frac{1}{\sqrt{2}}$ であるから

$$V_1=\int_0^{\frac{1}{4}} S(t)\,dt=\int_0^{\frac{1}{4}} \pi x^2\,dt=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \pi x^2(2x-4x^3)\,dx=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(2x^3-4x^5)\,dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{3}x^6\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\pi}{24}$$

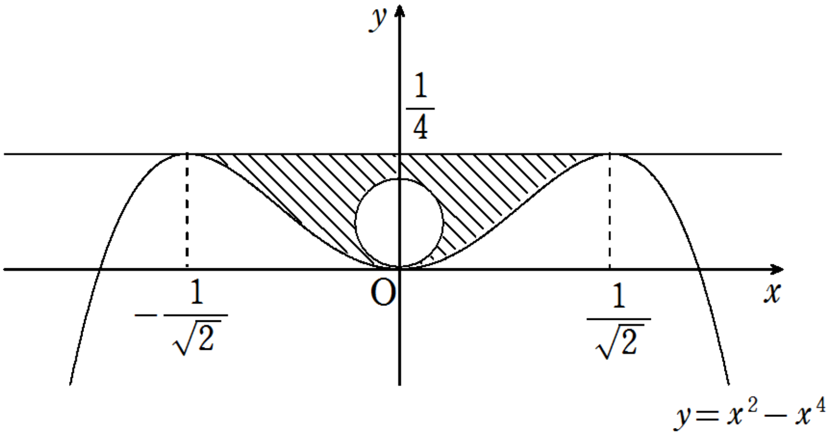
となる。

以下，求める立体の体積を V とする。

円 C が領域 D に含まれるのは，$2a \leqq \frac{1}{4}$ のときであり，$a>0$ より $0<a \leqq \frac{1}{8}$ のときである。

（Ⅰ）$0 < a \leqq \dfrac{1}{8}$ のとき

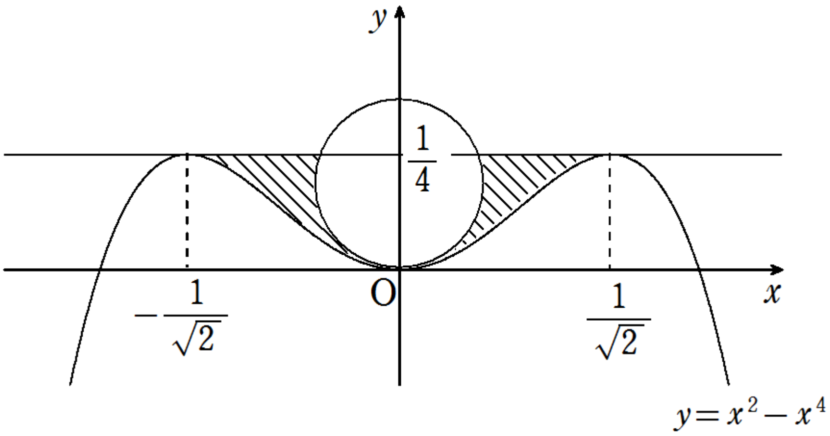
V は，下図の斜線部分を y 軸の周りに１回転させてできる立体の体積である。



よって，$V = V_1 - \dfrac{4}{3}\pi a^3 = \dfrac{\pi}{24} - \dfrac{4}{3}\pi a^3 = \left(\dfrac{1}{24} - \dfrac{4}{3}a^3\right)\pi$

（Ⅱ）$\dfrac{1}{8} \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

V は，下図の斜線部分を y 軸の周りに１回転させてできる立体の体積である。



よって，$V = V_1 - \int_0^{\frac{1}{4}} \pi x^2 dy = \dfrac{\pi}{24} - \int_0^{\frac{1}{4}} \pi \left\{a^2 - (y-a)^2\right\} dy = \dfrac{\pi}{24} - \pi \int_0^{\frac{1}{4}} \left(2ay - y^2\right) dy$

$$= \frac{\pi}{24} - \pi\left[ay^2 - \frac{1}{3}y^3\right]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{\pi}{24} - \pi\left(\frac{1}{16}a - \frac{1}{192}\right) = \left(\frac{3}{64} - \frac{a}{16}\right)\pi$$

以上より

$$V = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{24} - \dfrac{4}{3}a^3\right)\pi & \left(0 < a \leqq \dfrac{1}{8}\right) \\ \left(\dfrac{3}{64} - \dfrac{a}{16}\right)\pi & \left(\dfrac{1}{8} \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$