[東京工業大学 2021 年前期 $\boxed{5}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――☆

xy 平面上の円 $C: x^2+(y-a)^2=a^2$ （$a>0$）を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　円 C が $y \geqq x^2$ で表される領域に含まれるための a の範囲を求めよ。

(2)　円 C が $y \geqq x^2-x^4$ で表される領域に含まれるための a の範囲を求めよ。

(3)　a が(2)の範囲にあるとする。xy 平面において連立不等式

$$|x| \leqq \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0 \leqq y \leqq \frac{1}{4},\ y \geqq x^2-x^4,\ x^2+(y-a)^2 \geqq a^2$$

で表される領域 D を，y 軸の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――☆

(1)　円 C の中心を A とし，$y=x^2$ 上の点を $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ とする。

円 C が $y \geqq x^2$ で表される領域に含まれるための条件は，

すべての t に対して $\mathrm{AP} \geqq a$ となることである。

よって，$a>0$ のもとで両辺を 2 乗して

$$\mathrm{AP}^2 \geqq a^2 \quad \Leftrightarrow \quad t^2+(t-a)^2 \geqq a^2$$

$$\Leftrightarrow \quad t^2\{t^2-(2a-1)\} \geqq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad t^2 \geqq 2a-1$$

これがすべての t に対して成り立つ条件は

$$2a-1 \leqq 0$$

であるから，求める a の値の範囲は　$0<a \leqq \dfrac{1}{2}$

(2)　$y=x^2-x^4$ 上の点を $Q(t,\ t^2-t^4)$ とする。

円 C が $y \geqq x^2-x^4$ で表される領域に含まれるための条件は，

すべての t に対して $AQ \geqq a$ となることである。

よって，$a>0$ のもとで両辺を 2 乗して

$$AQ^2 \geqq a^2 \quad \Leftrightarrow \quad t^2+(t^2-t^4-a)^2 \geqq a^2$$

$$\Leftrightarrow \quad t^2\left\{t^6-2t^4+(2a+1)t^2-(2a-1)\right\} \geqq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad t^6-2t^4+(2a+1)t^2-(2a-1) \geqq 0 \quad \cdots ①$$

これがすべての t に対して成り立つ条件を考える。

まず，①の左辺を $f(t)$ とおくと，

$f(0)<0$ である場合には，0 に十分近い t に対して $f(t)<0$ となってしまうので

$f(0)=-(2a-1) \geqq 0$ であることが必要である。

よって，$0<a \leqq \dfrac{1}{2}$ であることが必要である。

逆にこのとき，すべての実数 x に対して不等式 $x^2 \geqq x^2-x^4$ が成り立つので，

$y \geqq x^2$ で表される領域は，$y \geqq x^2-x^4$ で表される領域に含まれている。

よって，(1)より $0<a \leqq \dfrac{1}{2}$ のときは，円 C は必ず $y \geqq x^2-x^4$ で表される領域にも含まれる。

よって，求める a の値の範囲は $0<a \leqq \dfrac{1}{2}$

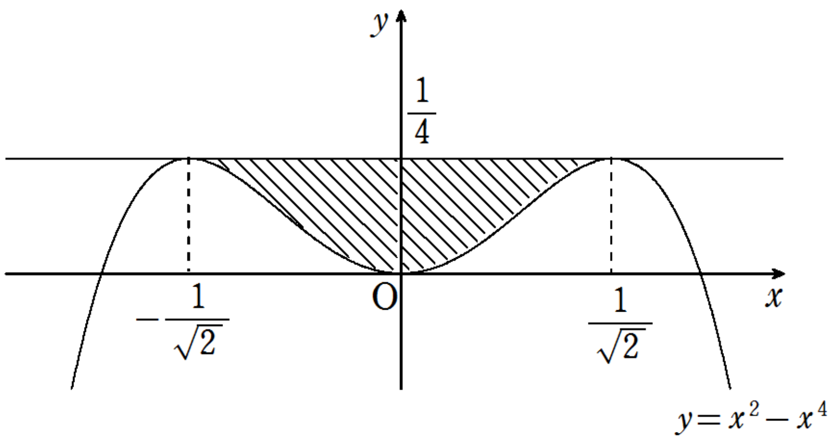
(3)　$g(x)=x^2-x^4$　とおく。

$g'(x)=2x-4x^3=2x(1-2x^2)$　と $y=g(x)$ が偶関数であることから，

$x \geqq 0$ における $g(x)$ の増減は下表に従う。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$

よって，$y=x^2-x^4$ のグラフの概形は次の図のようになる。



上図の斜線部分を D とし，D を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V_1 とする。

立体を $y=t$　$\left(0 \leqq t \leqq \frac{1}{4}\right)$　で切断したときの断面は円であり，

その面積 $S(t)$ は　$t=x^2-x^4$　を満たす x に対し，$S(t)=\pi x^2$　である。

また，$dt=(2x-4x^3)dx$　であり，$t:0 \to \frac{1}{4}$ のとき　$x:0 \to \frac{1}{\sqrt{2}}$　であるから

$$V_1=\int_0^{\frac{1}{4}} S(t)\,dt=\int_0^{\frac{1}{4}} \pi x^2\,dt=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \pi x^2(2x-4x^3)\,dx=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(2x^3-4x^5)\,dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{3}x^6\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\pi}{24}$$

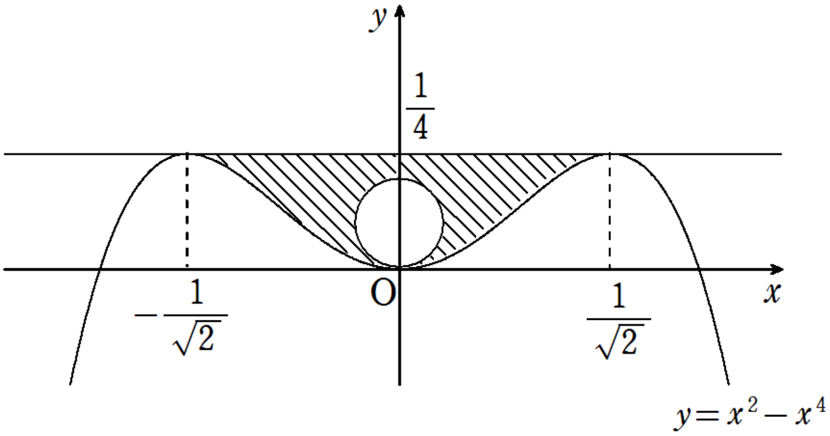
となる。

以下，求める立体の体積を V とする。

円 C が領域 D に含まれるのは，$2a \leqq \frac{1}{4}$　のときであり，$a>0$ より　$0<a \leqq \frac{1}{8}$　のときである。

（Ⅰ）$0<a \leqq \dfrac{1}{8}$ のとき

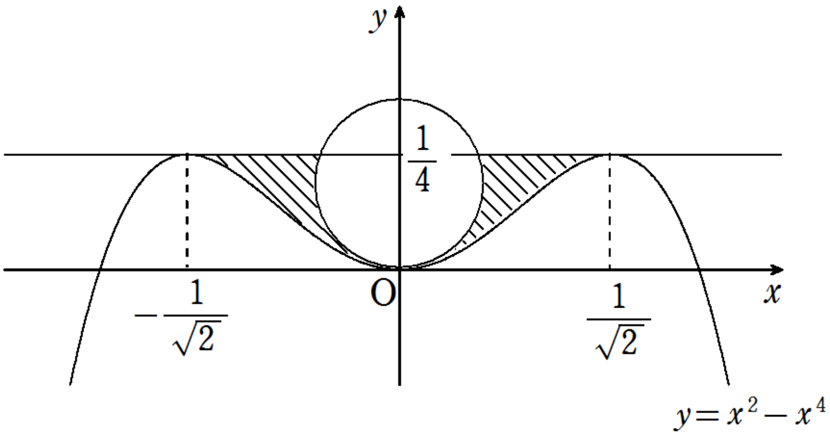
V は，下図の斜線部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積である。



よって，$V=V_1-\dfrac{4}{3}\pi a^3=\dfrac{\pi}{24}-\dfrac{4}{3}\pi a^3=\left(\dfrac{1}{24}-\dfrac{4}{3}a^3\right)\pi$

（Ⅱ）$\dfrac{1}{8} \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

V は，下図の斜線部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積である。



よって，$V=V_1-\int_0^{\frac{1}{4}}\pi x^2 dy=\dfrac{\pi}{24}-\int_0^{\frac{1}{4}}\pi\left\{a^2-(y-a)^2\right\}dy=\dfrac{\pi}{24}-\pi\int_0^{\frac{1}{4}}\left(2ay-y^2\right)dy$

$$=\frac{\pi}{24}-\pi\left[ay^2-\frac{1}{3}y^3\right]_0^{\frac{1}{4}}=\frac{\pi}{24}-\pi\left(\frac{1}{16}a-\frac{1}{192}\right)=\left(\frac{3}{64}-\frac{a}{16}\right)\pi$$

以上より

$$V=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{24}-\dfrac{4}{3}a^3\right)\pi & \left(0<a \leqq \dfrac{1}{8}\right)\\ \left(\dfrac{3}{64}-\dfrac{a}{16}\right)\pi & \left(\dfrac{1}{8} \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}\right)\end{cases}$$