[東京工業大学 2021 年前期 $\boxed{4}$]

S を，座標空間内の原点 O を中心とする半径1の球面とする。S 上を動く点 A, B, C, D に対して

$$F=2\left(\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2\right)-3\left(\mathrm{AD}^2+\mathrm{BD}^2+\mathrm{CD}^2\right)$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c},\ \overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とするとき，$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c},\ \vec{d}$ によらない定数 k によって

$$F=k\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-3\vec{d}\right)$$

と書けることを示し，定数 k を求めよ。

(2)　点 A, B, C, D が球面 S 上を動くときの，F の最大値 M を求めよ。

(3)　点 C の座標が $\left(-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{\sqrt{15}}{4},\ 0\right)$，点 D の座標が $(1,\ 0,\ 0)$ であるとき，

$F=M$ となる S 上の点 A, B の組をすべて求めよ。

(1)　A, B, C, D は半径 1 の球面上にあるから

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=1$$

また，$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{x}$ とおくと

$$F=2\left(|\vec{b}-\vec{a}|^2+|\vec{c}-\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{c}|^2\right)-3\left(|\vec{d}-\vec{a}|^2+|\vec{d}-\vec{b}|^2+|\vec{d}-\vec{c}|^2\right)$$

$$=2\left(6-2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}\cdot\vec{c}-2\vec{c}\cdot\vec{a}\right)-3\left(6-2\vec{a}\cdot\vec{d}-2\vec{b}\cdot\vec{d}-2\vec{c}\cdot\vec{d}\right)$$

$$=12-2\left(|\vec{x}|^2-|\vec{a}|^2-|\vec{b}|-|\vec{c}|^2\right)-18+6\vec{x}\cdot\vec{d}$$

$$=12-2\left(|\vec{x}|^2-3\right)-18+6\vec{x}\cdot\vec{d}$$

$$=-2|\vec{x}|^2+6\vec{x}\cdot\vec{d}$$

$$=-2\vec{x}\left(\vec{x}-3\vec{d}\right)\quad\cdots①$$

よって，$k=-2$ として題意は満たされる。

(2)　①より

$$F=-2|\vec{x}|^2+6\vec{x}\cdot\vec{d}=-2\left(|\vec{x}|^2-3\vec{x}\cdot\vec{d}\right)=-2\left(\left|\vec{x}-\frac{3}{2}\vec{d}\right|^2-\frac{9}{4}|\vec{d}|^2\right)=-2\left|\vec{x}-\frac{3}{2}\vec{d}\right|^2+\frac{9}{2}$$

よって，$F\leqq\dfrac{9}{2}$であり，最大値として$M=\dfrac{9}{2}$が実現することは(3)で示す。

(3)　(2)より，$F=\dfrac{9}{2}$のとき $\vec{x}=\dfrac{3}{2}\vec{d}$ である。

よって $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\dfrac{3}{2}\vec{d}$ より

$$\vec{a}+\vec{b}=\frac{3}{2}\vec{d}-\vec{c}=\left(\frac{3}{2},\,0,\,0\right)-\left(-\frac{1}{4},\,\frac{\sqrt{15}}{4},\,0\right)=\left(\frac{7}{4},\,-\frac{\sqrt{15}}{4},\,0\right)$$

である。ここで，ABの中点をNとすると

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})=\left(\frac{7}{8},\,-\frac{\sqrt{15}}{8},\,0\right)$$

となり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{ON}}|^2=\left(\frac{7}{8}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{15}}{8}\right)^2+0^2=\frac{49+15}{64}=1$$

であるから，A, B, NはすべてS上にある。

球面上のA, Bの中点Nが球面上にあるということは,

A, B, Nがすべて一致することを意味する。

よって，$\mathrm{A}\left(\dfrac{7}{8},\,-\dfrac{\sqrt{15}}{8},\,0\right)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{7}{8},\,-\dfrac{\sqrt{15}}{8},\,0\right)$