[東京工業大学 2021 年前期 $\boxed{3}$]

以下の問いに答えよ。

(1) 正の整数 n に対して，二項係数に関する次の等式を示せ。

$$n\,{}_{2n}\mathrm{C}_n = (n+1)\,{}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}$$

また，これを用いて ${}_{2n}\mathrm{C}_n$ は $n+1$ の倍数であることを示せ。

(2) 正の整数 n に対して，

$$a_n = \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}$$

とおく。このとき， $n \geqq 4$ ならば $a_n > n+2$ であることを示せ。

(3) a_n が素数となる正の整数 n をすべて求めよ。

(1) $n\,{}_{2n}\mathrm{C}_n = n\cdot\dfrac{(2n)!}{n!n!} = \dfrac{(2n)!}{(n-1)!n!} = (n+1)\cdot\dfrac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = (n+1)\,{}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}$ となる。

また， ${}_{2n}\mathrm{C}_n$， ${}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}$ はともに整数であり， n と $n+1$ は互いに素であるから

${}_{2n}\mathrm{C}_n$ は $n+1$ の倍数である。

(2) 数学的帰納法により示す。

(Ⅰ) $n=4$ のとき

$a_4 = \dfrac{{}_8\mathrm{C}_4}{5} = 14 > 6$ より成り立つ。

(Ⅱ) $n=k$ （$k \geqq 4$）のとき， $a_k > k+2$ …① が成り立つとする。

ここで，

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{{}_{2(n+1)}\mathrm{C}_{n+1}}{n+2}\cdot\frac{n+1}{{}_{2n}\mathrm{C}_n} = \frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}\cdot\frac{n!n!}{(2n)!}$$
$$= \frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{(2n+2)(2n+1)\cdot(2n)!}{(n+1)\cdot n!\cdot(n+1)\cdot n!}\cdot\frac{n!n!}{(2n)!} = \frac{2(2n+1)}{n+2}$$

より $a_{n+1} = \dfrac{2(2n+1)}{n+2}a_n$ …② である。

$a_{k+1} - (k+3) = \dfrac{2(2k+1)}{k+2}a_k - (k+3)$ （②より）

$$> \frac{2(2k+1)}{k+2} \cdot (k+2) - (k+3) \quad \text{（①より）}$$

$$= 4k+2-(k+3)$$

$$= 3k-1$$

よって，$k \geqq 4$ のとき，$a_{k+1} - \left(k+3\right) > 0$ であるから，$n = k+1$ のときにも①は成り立つ。

したがって，数学的帰納法により題意は成り立つ。

〔別解〕

$n \geqq 4$ のとき

$$a_n = \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{2n(2n-1)\cdots\cdots(n+2)}{n!} = \frac{(2n-1)\cdots\cdots(n+2)}{(n-1)\cdots\cdots 3}$$

$$= \frac{(2n-1)\cdots\cdots(n+3)}{(n-1)\cdots\cdots 3} \cdot (n+2) = \frac{2n-1}{n-1} \cdots\cdots \frac{n+3}{3} \cdot (n+2) > \left(\frac{n+3}{n-1}\right)^{n-3} (n+2) > n+2$$

(3)　$a_1 = \frac{{}_2\mathrm{C}_1}{2} = 1$，$a_2 = \frac{{}_4\mathrm{C}_2}{3} = 2$，$a_3 = \frac{{}_6\mathrm{C}_3}{4} = 5$，$a_4 = \frac{{}_8\mathrm{C}_4}{5} = 14$ である。

次に，$n \geqq 4$ に対し，a_n が素数にならないことを示す。

②より $a_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} a_n$ であり，

a_{n+1} が素数であると仮定すると a_n または $2(2n+1)$ が素因数 a_{n+1} をもつことになる。

まず，②より $a_{n+1} > a_n$ であるから，a_n は素因数 a_{n+1} をもたない。

次に，$a_n > n+2$ より $a_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} a_n > \frac{2(2n+1)}{n+2} \cdot (n+2) = 2(2n+1)$ であるから，

$2(2n+1)$ も素因数 a_{n+1} をもたない。

よって，a_{n+1} は素数にならない。

したがって，a_n が素数となる正の整数 n は $n = 2, 3$