[東京工業大学 2021 年前期 $\boxed{2}$]

xy 平面上の楕円

$$E:\frac{x^2}{4}+y^2=1$$

について，以下の問いに答えよ。

(1)　$a,\ b$ を実数とする。直線 $\ell: y=ax+b$ と楕円 E が異なる 2 点を共有するための $a,\ b$ の条件を求めよ。

(2)　実数 $a,\ b,\ c$ に対して，直線 $\ell: y=ax+b$ と直線 $m: y=ax+c$ が，それぞれ楕円 E と異なる 2 点を共有しているとする。ただし，$b>c$ とする。

直線 ℓ と楕円 E の 2 つの共有点のうち x 座標の小さい方を P，大きい方を Q とする。

また，直線 m と楕円 E の 2 つの共有点のうち x 座標の小さい方を S，大きい方を R とする。

このとき，等式

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{SR}}$$

が成り立つための $a,\ b,\ c$ の条件を求めよ。

(3)　楕円 E 上の 4 点の組で，それらを 4 頂点とする四角形が正方形であるものをすべて求めよ。

---

(1)　$E:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ と $\ell: y=ax+b$ から y を消去すると

$$x^2+4(ax+b)^2=4 \quad \Leftrightarrow \quad (4a^2+1)x^2+8abx+4(b^2-1)=0$$

解の公式により

$$x=\frac{-4ab\pm\sqrt{16a^2b^2-(4a^2+1)\cdot 4(b^2-1)}}{4a^2+1}$$

$$=\frac{-4ab\pm 2\sqrt{4a^2-b^2+1}}{4a^2+1} \quad \cdots①$$

E と ℓ が異なる 2 点を共有するとき，①の $\sqrt{\quad}$ の中は正となるから

求める条件は　$4a^2-b^2+1>0$　つまり　$b^2<4a^2+1$

(2)　PQとSRの傾きはともにaであるから常に平行である。

よって，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{SR}}$ が成り立つのは，

P, Qのx座標の差とS, Rのx座標の差が等しいときである。

P, Qのx座標の差は①より　$\dfrac{4\sqrt{4a^2-b^2+1}}{4a^2+1}$

S, Rのx座標の差は同様にして　$\dfrac{4\sqrt{4a^2-c^2+1}}{4a^2+1}$

であるから，求める条件は $b^2=c^2$ かつ $b>c$ である。

したがって，(1)の結果を踏まえて求める条件は

$b^2<4a^2+1$ かつ $b=-c$ かつ $b>0$

(3)　楕円E上の四角形PQRSが正方形であるためには，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{SR}}$ となることが必要である。

このとき，(2)より $b=-c$ であるから，PとR，QとSは原点対称の位置にある。

さらに，四角形PQRSが正方形であるとき，$\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}$ かつ $\mathrm{OP}\perp\mathrm{OQ}$ であるから

4点の座標は $u,\ v\geqq 0$ を用いてそれぞれ $(u,\ v),\ (v,\ -u),\ (-v,\ u),\ (-u,\ -v)$ とおける。

これらが楕円E上にあることから

$\dfrac{u^2}{4}+v^2=1$ かつ $\dfrac{v^2}{4}+u^2=1$

これを解くと，$u=v=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

したがって，求める4頂点は

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right),\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right),\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$