[東京工業大学 2021 年前期 $\boxed{1}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――☆

正の整数に関する条件

（＊）10進法で表したときに，どの位にも数字9が現れない

を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　k を正の整数とするとき，10^{k-1} 以上かつ 10^k 未満であって条件（＊）を満たす正の整数の個数を a_k とする。このとき，a_k を k の式で表せ。

(2)　正の整数 n に対して，

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & (n\text{が条件(＊)を満たすとき}) \\ 0 & (n\text{が条件(＊)を満たさないとき}) \end{cases}$$

とおく。このとき，すべての正の整数 k に対して次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{n=1}^{10^k-1} b_n < 80$$

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1)　10^{k-1} 以上かつ 10^k 未満の整数は，k 桁の整数である。

このうち，（＊）を満たすものは

最高位の数字は 1 から 8 までの 8 通り，それ以外の $k-1$ 桁の数字は 0～8 の 9 通り

の選び方がある。

よって，$a_k = 8\cdot 9^{k-1}$

(2) m を整数とし，$S_m = \displaystyle\sum_{n=10^{m-1}}^{10^m-1} b_n$ とおく。

m 桁の整数である $10^{m-1} \leqq n < 10^m$ の範囲の整数 n について

$\dfrac{1}{10^m} < \dfrac{1}{n} \leqq \dfrac{1}{10^{m-1}}$ であるから，(1)より $S_m \leqq \dfrac{a_m}{10^{m-1}} = \dfrac{8\cdot 9^{m-1}}{10^{m-1}}$

となる。

よって

$$\sum_{n=1}^{10^k-1} b_n = \sum_{m=1}^{k} \frac{8 \cdot 9^{m-1}}{10^{m-1}} = 8\sum_{m=1}^{k}\left(\frac{9}{10}\right)^{m-1} = 8 \cdot \frac{1-\left(\frac{9}{10}\right)^k}{1-\frac{9}{10}} = 80\left\{1-\left(\frac{9}{10}\right)^k\right\} < 80$$

となり，示された。