[東京工業大学 2021 年前期 $\boxed{1}$]

正の整数に関する条件

（＊）10 進法で表したときに，どの位にも数字 9 が現れない

を考える。以下の問いに答えよ。

(1) k を正の整数とするとき，10^{k-1} 以上かつ 10^k 未満であって条件（＊）を満たす正の整数の個数を a_k とする。このとき，a_k を k の式で表せ。

(2) 正の整数 n に対して，

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & (n\text{が条件(＊)を満たすとき}) \\ 0 & (n\text{が条件(＊)を満たさないとき}) \end{cases}$$

とおく。このとき，すべての正の整数 k に対して次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{n=1}^{10^k-1} b_n < 80$$

xy 平面上の楕円

$$E:\frac{x^2}{4}+y^2=1$$

について，以下の問いに答えよ。

(1)　$a,\ b$ を実数とする。直線 $\ell: y=ax+b$ と楕円 E が異なる２点を共有するための $a,\ b$ の条件を求めよ。

(2)　実数 $a,\ b,\ c$ に対して，直線 $\ell: y=ax+b$ と直線 $m: y=ax+c$ が，それぞれ楕円 E と異なる２点を共有しているとする。ただし，$b>c$ とする。

直線 ℓ と楕円 E の２つの共有点のうち x 座標の小さい方をP，大きい方をQとする。

また，直線 m と楕円 E の２つの共有点のうち x 座標の小さい方をS，大きい方をRとする。

このとき，等式

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{SR}}$$

が成り立つための $a,\ b,\ c$ の条件を求めよ。

(3)　楕円 E 上の４点の組で，それらを４頂点とする四角形が正方形であるものをすべて求めよ。

[東京工業大学 2021 年前期 $\boxed{3}$]

以下の問いに答えよ。

(1) 正の整数 n に対して，二項係数に関する次の等式を示せ。

$$n\ {}_{2n}\mathrm{C}_n = (n+1)\ {}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}$$

また，これを用いて ${}_{2n}\mathrm{C}_n$ は $n+1$ の倍数であることを示せ。

(2) 正の整数 n に対して，

$$a_n = \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}$$

とおく。このとき，$n \geqq 4$ ならば $a_n > n+2$ であることを示せ。

(3) a_n が素数となる正の整数 n をすべて求めよ。

[東京工業大学 2021 年前期 $\boxed{4}$]

S を，座標空間内の原点 O を中心とする半径1の球面とする。S 上を動く点 A, B, C, D に対して

$$F = 2\left(\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2\right) - 3\left(\mathrm{AD}^2 + \mathrm{BD}^2 + \mathrm{CD}^2\right)$$

とおく。以下の問い に答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c},\ \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \vec{d}$ とするとき，$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c},\ \vec{d}$ によらない定数 k によって

$$F = k\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) \cdot \left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - 3\vec{d}\right)$$

と書けることを示し，定数 k を求めよ。

(2)　点 A, B, C, D が球面 S 上を動くときの，F の最大値 M を求めよ。

(3)　点 C の座標が $\left(-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{\sqrt{15}}{4},\ 0\right)$，点 D の座標が $(1,\ 0,\ 0)$ であるとき，

$F = M$ となる S 上の点 A, B の組をすべて求めよ。

[東京工業大学 2021 年前期 $\boxed{5}$]

xy 平面上の円 $C : x^2+(y-a)^2=a^2$ （$a>0$）を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 円 C が $y \geqq x^2$ で表される領域に含まれるための a の範囲を求めよ。

(2) 円 C が $y \geqq x^2-x^4$ で表される領域に含まれるための a の範囲を求めよ。

(3) a が(2)の範囲にあるとする。xy 平面において連立不等式

$$|x| \leqq \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0 \leqq y \leqq \frac{1}{4},\ y \geqq x^2-x^4,\ x^2+(y-a)^2 \geqq a^2$$

で表される領域 D を，y 軸の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ。