[東京工業大学 2020 年前期 $\boxed{1}$]

次の問いに答えよ。

(1) $\left|x^2-x-23\right|$の値が，3 を法として 2 に合同である正の整数 x をすべて求めよ。

(2) k 個の連続した正の整数 $x_1, \cdots, x_k$ に対して，

$$\left|{x_j}^2-x_j-23\right| \quad (1 \leqq j \leqq k)$$

の値がすべて素数になる k の最大値と，その k に対する連続した正の整数 $x_1, \cdots, x_k$ をすべて求めよ。

ここで，k 個の連続した整数とは，

$$x_1,\ x_1+1,\ x_1+2,\ \cdots,\ x_1+k-1$$

となる列のことである。

(1) $f(x)=x^2-x-23$ とおく。以下，合同式はすべて $\mathrm{mod}\,3$ とする。

$|f(1)|=|1-1-23|=23\equiv 2$，　$|f(2)|=|4-2-23|=21\equiv 0$

$|f(3)|=|9-3-23|=17\equiv 2$，　$|f(4)|=|16-4-23|=11\equiv 2$

$|f(5)|=|25-5-23|=3\equiv 0$，　$|f(6)|=|36-6-23|=7\equiv 1$

となる。

$x\geqq 6$ のとき，$f(x)=x(x-1)-23\geqq f(6)>0$ より $|f(x)|=f(x)$ である。

・$x\equiv 0$ のとき

$f(x)\equiv 0-0-23=-23\equiv 1$

・$x\equiv 1$ のとき

$f(x)\equiv 1-1-23=-23\equiv 1$

・$x\equiv 2$ のとき

$f(x)\equiv 4-2-23=-21\equiv 0$

であるから，$|f(x)|\equiv 2$ となる正の整数 x は $1,\ 3,\ 4$

(2) x_1を正の整数として，

k個の整数 $|f(x_1)|, |f(x_1+1)|, \cdots\cdots, |f(x_1+k-1)|$ がすべて素数であるとする。

(1)より$x\equiv 2$かつ$x \geqq 6$のとき，$|f(x)|$は$f(6)=7$以上の3の倍数になるので，素数ではない。

3つの連続する整数 x_1，x_1+1, x_2+2 の中には3を法として2と合同になるものが存在するので，

$x_1 \geqq 6$のとき，$k \leqq 2$である。

また，$|f(1)|$が素数で$|f(2)|$が素数でないから，$x_1=1$ならば$k=1$である。

そして，$|f(3)|, |f(4)|, |f(5)|, |f(6)|$および$|f(7)|=|49-7-23|=19$ がすべて素数であることから

kの最大値は5であり，このときの$x_1, \cdots, x_k$は，3, 4, 5, 6, 7 である。

［ 東京工業大学 2020 年前期 $\boxed{2}$ ］

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

複素数平面上の異なる 3 点 A, B, C を複素数 α, β, γ で表す。ここで A, B, C は同一直線上にないと仮定する。

(1)　△ABC が正三角形となる必要十分条件は

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$$

であることを示せ。

(2)　△ABC は正三角形のとき，△ABC の外接円上の点 P を任意にとる。このとき，

$$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$$

および

$$\mathrm{AP}^4+\mathrm{BP}^4+\mathrm{CP}^4$$

を外接円の半径 R を用いて表せ。ただし，2 点 X, Y に対し， XY とは線分 XY の長さを表す。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) 60° 回転を表す複素数を c とすると

$$c=\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\qquad c^{-1}=\cos\left(-60^\circ\right)+i\sin\left(-60^\circ\right)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

である。

△ABC が正三角形となるとき，

「$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を 60° 回転したものが $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$」または「$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を -60° 回転したものが $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$」

であるから，

$\gamma-\alpha=c\left(\beta-\alpha\right)$ または $\gamma-\alpha=c^{-1}\left(\beta-\alpha\right)$

$$\left\{\gamma-\alpha-c\left(\beta-\alpha\right)\right\}\left\{\gamma-\alpha-c^{-1}\left(\beta-\alpha\right)\right\}=0$$

$$\left(\gamma-\alpha\right)^2+\left(\beta-\alpha\right)^2-\left(c+c^{-1}\right)\left(\gamma-\beta\right)\left(\beta-\alpha\right)=0$$

ここで， $c+c^{-1}=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=1$ であるから

$$\gamma^2-2\alpha\gamma+\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta+\beta^2-\left(\beta\gamma-\alpha\gamma-\alpha\beta+\alpha^2\right)=0 \iff \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$$

(2) △ABCの外接円の中心をO， $\mathrm{P}(p)$ とすると

$$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$$

$$=|p-\alpha|^2+|p-\beta|^2+|p-\gamma|^2$$

$$=(p-\alpha)\left(\overline{p}-\overline{\alpha}\right)+(p-\beta)\left(\overline{p}-\overline{\beta}\right)+(p-\gamma)\left(\overline{p}-\overline{\gamma}\right)$$

$$=3|p|^2+|\alpha|^2+|\beta|^2+|\gamma|^2-p\left(\overline{\alpha}+\overline{\beta}+\overline{\gamma}\right)-\overline{p}(\alpha+\beta+\gamma) \quad \cdots①$$

ここで，△ABCの重心はOであることより $\alpha+\beta+\gamma=0$，および $|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=|p|=R$ より

$$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2=3R^2+R^2+R^2+R^2-p\cdot\overline{0}-\overline{p}\cdot 0=6R^2$$

次に，$|p-\alpha|^4=\left\{(p-\alpha)\left(\overline{p}-\overline{\alpha}\right)\right\}$

$$=\left(2R^2-p\overline{\alpha}-\overline{p}\alpha\right)^2$$

$$=4R^4-4R^2\left(p\overline{\alpha}+\overline{p}\alpha\right)+p^2\overline{\alpha}^2+2|p|^2|\alpha|^2+\overline{p}^2\alpha^2$$

であるので，

$$\mathrm{AP}^4+\mathrm{BP}^4+\mathrm{CP}^4=|p-\alpha|^4+|p-\beta|^4+|p-\gamma|^4$$

$$=3\times\left(4R^4+2R^4\right)-4R^2\left\{p\left(\overline{\alpha}+\overline{\beta}+\overline{\gamma}\right)+\overline{p}(\alpha+\beta+\gamma)\right\}$$

$$+p^2\left(\overline{\alpha}^2+\overline{\beta}^2+\overline{\gamma}^2\right)+\overline{p}^2\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)$$

$$=18R^4+p^2\left(\overline{\alpha}^2+\overline{\beta}^2+\overline{\gamma}^2\right)+\overline{p}^2\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)$$

となる。ここで，

$$\alpha+\beta+\gamma=0 \text{ より } \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$

$$=0^2-2\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)$$

であるから

$$3\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)=0 \text{ より } \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0$$

よって

$$\mathrm{AP}^4+\mathrm{BP}^4+\mathrm{CP}^4=18R^4$$

[東京工業大学 2020 年前期 $\boxed{3}$]

☆───☆

座標空間に 5 点

$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}(3,\ 0,\ 0),\ \mathrm{B}(0, 3,\ 0),\ \mathrm{C}(0,\ 0, 4),\ \mathrm{P}(0,\ 0,\ -2)$

をとる。さらに $0<a<3,\ 0<b<3$ に対して 2 点 $\mathrm{Q}(a,\ 0,\ 0)$ と $\mathrm{R}(0,\ b,\ 0)$ を考える。

(1) 点 P, Q, R を通る平面を H とする。平面 H と線分 AC の交点 T の座標，および平面 H と線分 BC の交点 S の座標を求めよ。

(2) 点 Q, R, S, T が同一円周上にあるための必要十分条件を $a,\ b$ を用いて表し，それを満たす点 $(a,\ b)$ の範囲を座標平面上に図示せよ。

☆───☆

(1) P, Q, A, C は xz 平面上の点であるから，y 座標はそれぞれ 0 であり，zx 平面上で直線 AC，PQ の交点が T である。

直線 AC：$\dfrac{x}{3}+\dfrac{z}{4}=1$，直線 PQ：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{-2}=1$

これらを連立させて解くと，$x=\dfrac{9a}{2a+3}$，$z=\dfrac{12-4a}{2a+3}$

よって $\mathrm{T}\left(\dfrac{9a}{2a+3},\ 0,\ \dfrac{12-4a}{2a+3}\right)$

また，P, R, B, C は yz 平面上の点であるから，x 座標はそれぞれ 0 であり，zx 平面上で直線 BC，PR の交点が S である。

直線 BC：$\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1$，直線 PR：$\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{-2}=1$

これらをれ連立させて解くと，$y=\dfrac{9b}{2a+3}$，$z=\dfrac{12-4b}{2a+3}$

よって $\mathrm{S}\left(0,\ \dfrac{9b}{2a+3},\ \dfrac{12-4b}{2a+3}\right)$

(2) $0<a<3$，$0<b<3$ のもとで，Q, R, S, T が同一円周上にあるための必要十分条件は，

法べきの定理とその逆により $\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PT}=\mathrm{PR}\cdot\mathrm{PS}$ …①

ここで，P, Q, T の x 座標について

$\mathrm{PQ}:\mathrm{PT}=a:\dfrac{9a}{2a+3}$ より $\mathrm{PT}=\dfrac{9}{2a+3}\mathrm{PQ}$ であるから，$\mathrm{PT}\cdot\mathrm{PQ}=\dfrac{9}{2a+3}\mathrm{PQ}^2$ …②

P, Q, S の x 座標についても同様に

$\mathrm{PR}:\mathrm{PS}=b:\dfrac{9b}{2b+3}$ より $\mathrm{PS}=\dfrac{9}{2b+3}\mathrm{PR}$ であるから，$\mathrm{PS}\cdot\mathrm{PR}=\dfrac{9}{2b+3}\mathrm{PR}^2$ …③

①②③より

$$\frac{9}{2a+3}\mathrm{PQ}^2=\frac{9}{2b+3}\mathrm{PR}^2$$

したがって

$$(2b+3)(a^2+4)=(2a+3)(b^2+4) \iff 2a^2b-2ab^2+8b-8a+3a^2-3b^2=0$$

$$\iff (a-b)(2ab+3a+3b-8)=0$$

より

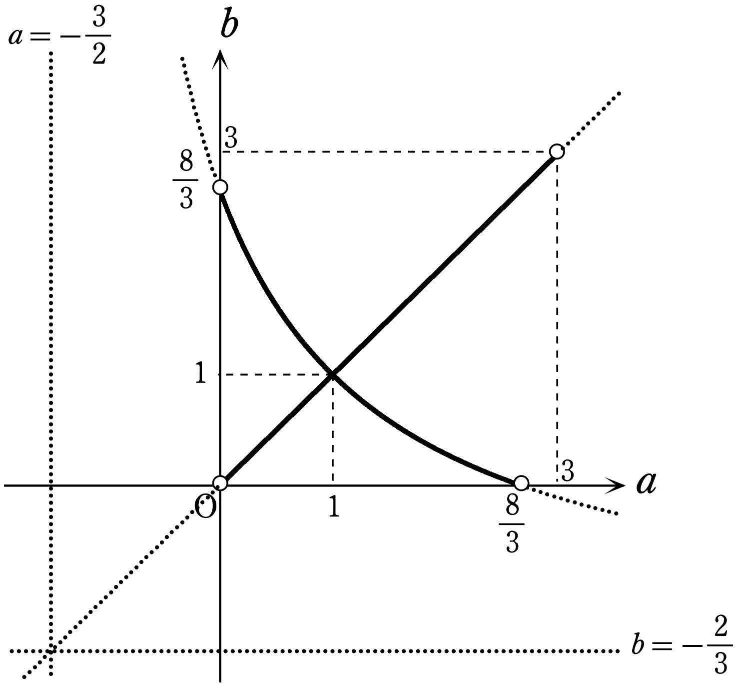
$a-b=0$ または $2ab+3a+3b-8=0$ …（＊）

$2ab+3a+3b-8=0 \iff (2a+3)b=-3a+8$

$$\iff b=\frac{-3a+8}{2a+3}=-\frac{3}{2}+\frac{\frac{25}{4}}{a+\frac{3}{2}} \quad \cdots ④$$

であるから，④は $a=-\dfrac{3}{2}$, $b=-\dfrac{3}{2}$ を漸近線とする双曲線（の一部）である。

よって（＊）を図示すると次の図の実線部分になる。ただし，○は含まない。



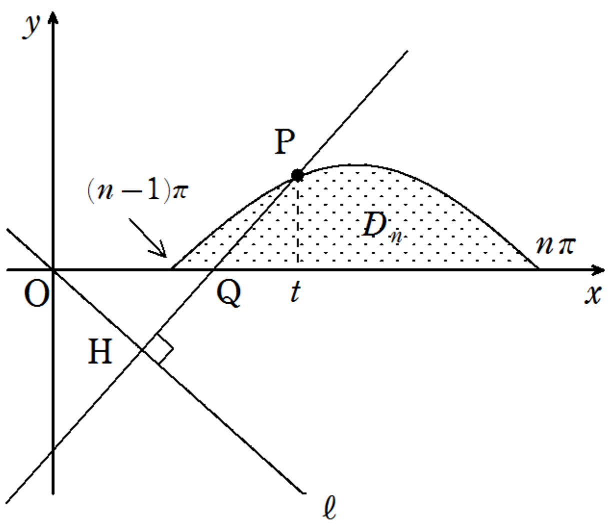
[東京工業大学 2020 年前期 $\boxed{4}$]

n を正の奇数とする。曲線 $y=\sin x$ （$(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$ ）と x 軸で囲まれた部分を D_n とする。直線 $x+y=0$ を ℓ とおき，ℓ の周りに D_n を 1 回転させてできる回転体を V_n とする。

(1)　$(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$ に対して，点 $(x,\ \sin x)$ を P とおく。また P から ℓ に下ろした垂線と x 軸の交点を Q とする。線分 PQ を ℓ の周りに 1 回転させてできる図形の面積を x の式で表せ。

(2)　(1)の結果を用いて，回転体 V_n の体積を n の式で表せ。

(1) n は正の奇数であるから， D_n は x の上側にあり， P から ℓ に下ろした垂線の足を H とすると，P, Q, H はこの順に並ぶ。



求める面積は $\pi\left(\mathrm{PH}^2-\mathrm{QH}^2\right)$ である。

P$(t,\ \sin t)$ （$(n-1)\pi \leqq t \leqq n\pi$ ）とおく。

直線 PH の方程式は $\ell : x+y=0$ に垂直であるから，

$$y-\sin t=1(x-t) \iff y=x+\sin t-t$$

これより

$$\mathrm{Q}(t-\sin t,\ 0),\quad \mathrm{H}\left(\frac{t-\sin t}{2},\ \frac{\sin t-t}{2}\right)$$

である。

よって

$$\pi\left(\mathrm{PH}^2-\mathrm{QH}^2\right)=\pi\left\{\left(\frac{t+\sin t}{2}\right)^2+\left(\frac{\sin t+t}{2}\right)^2-\left(\frac{t-\sin t}{2}\right)^2-\left(\frac{\sin t-t}{2}\right)^2\right\}$$

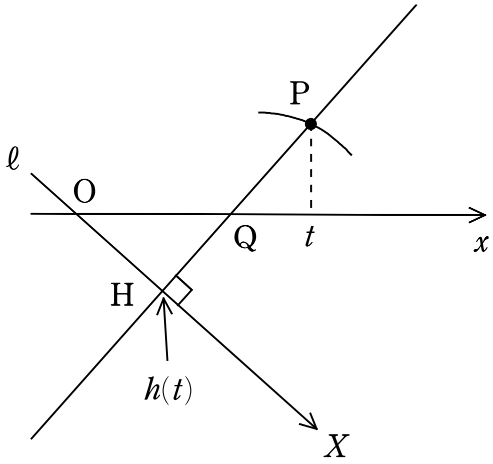
$$=\pi\cdot 2t\sin t$$

よって，求める図形の面積を x を用いて表すと $2\pi x\sin x$

(2) ℓ を X 軸（Oを原点，x 座標が増える向きを正），Hの X 座標OHを $h(t)$ とし，

$S(t)=2\pi t\sin t$ とおく。

このとき，求める体積は $\int_{h((n-1)\pi)}^{h(n\pi)} S(t)dX$ である。



変数を t に置換すると

$$X=h(t)=\mathrm{OH}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(t-\sin t\right) \text{ より } dX=h'(t)dt$$

$$X:h\left((n-1)\pi\right)\to h(n\pi) \text{ のとき } t:(n-1)\pi\to n\pi$$

であるから

$$\int_{h((n-1)\pi)}^{h(n\pi)} S(t)dX=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\cos t\right)dt=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} S(t)h'(t)dt=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} 2\pi t\sin t\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\cos t\right)dt$$

$$=\sqrt{2}\pi\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} t\sin t dt-\frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} t\sin 2t dt$$

ここで，右辺第１項の積分について

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} t\sin t dt=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} t\left(-\cos t\right)' dt=\left[-t\cos t\right]_{(n-1)\pi}^{n\pi}+\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\cos t dt=\left[-t\cos t+\sin t\right]_{(n-1)\pi}^{n\pi}$$

$$=-n\pi\cos n\pi+(n-1)\pi\cos(n-1)\pi$$

$$=n\pi+(n-1)\pi \qquad (\because n \text{ は奇数})$$

$$=(2n-1)\pi$$

右辺第２項の積分について

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} t\sin 2t dt=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} t\left(-\frac{1}{2}\cos 2t\right)' dt=\left[-\frac{1}{2}t\cos t\right]_{(n-1)\pi}^{n\pi}+\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{1}{2}\cos 2t dt$$

$$=\left[-\frac{1}{2}t\cos t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_{(n-1)\pi}^{n\pi}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(n\pi\right)+\frac{1}{2}\left(n-1\right)\pi$$

$$=-\frac{\pi}{2}$$

したがって，求める体積 V_n は

$$V_n=\sqrt{2}\pi\cdot\left(2n-1\right)\pi-\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}\left(2n-\frac{3}{4}\right)\pi^2$$

[東京工業大学 2020 年前期 $\boxed{5}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

k を正の整数とし，$a_k=\int_0^1 x^{k-1}\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)dx$ とおく。

(1) a_{k+2} を a_k と k を用いて表せ。

(2) k を限りなく大きくするとき，数列 $\{ka_k\}$ の極限値 A を求めよ。

(3) (2)の極限値 A に対し，k を限りなく大きくするとき，数列

$\{k^m a_k-k^n A\}$

が 0 でない値に収束する整数 $m,\ n$（$m>n\geqq 1$）を求めよ。

またそのときの極限値 B を求めよ。

(4) (2)と(3)の極限値 $A,\ B$ に対し，k を限りなく大きくするとき，数列

$\{k^p a_k-k^q A-k^r B\}$

が 0 ではない値に収束する整数 $p,\ q,\ r$（$p>q>r\geqq 1$）を求めよ。

またそのときの極限値を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) $a_k=\int_0^1 x^{k-1}\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)dx$ より

$$a_{k+2}=\int_0^1 x^{k+1}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$$

$$=\int_0^1 x^{k+1}\left\{-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right\}' dx$$

$$=\left[x^{k+1}\left\{-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right\}\right]_0^1+(k+1)\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^1 x^k\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$$

$$=(k+1)\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^1 x^k\left\{\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right\}' dx$$

$$=(k+1)\cdot\frac{2}{\pi}\left\{\left[x^k\cdot\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]_0^1-\frac{2}{\pi}\int_0^1 kx^{k-1}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx\right\}$$

$$=(k+1)\cdot\frac{2}{\pi}\left\{\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}k\int_0^1 x^{k-1}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx\right\}$$

$$=(k+1)\cdot\frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}ka_k\right)$$

$$=\frac{4}{\pi^2}(k+1)\left(1-ka_k\right)$$

よって

$$a_{k+2}=\frac{4}{\pi^2}(k+1)\left(1-ka_k\right)\quad\cdots①$$

(2) $0\leqq x\leqq 1$のとき　$0\leqq\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\leqq 1$，　$x^{k-1}\geqq 0$　であるから

$$0\leqq a_k=\int_0^1 x^{k-1}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx\leqq\int_0^1 x^{k-1}dx$$

よって

$$0\leqq a_k\leqq\frac{1}{k}$$

はさみうちの原理より

$$\lim_{k\to\infty}a_k=0$$

ここで，　$a_{k+2}=\frac{4}{\pi^2}(k+1)\left(1-ka_k\right)$　より

$$1-ka_k=\frac{\pi^2}{4(k+1)}a_{k+2}\quad\Leftrightarrow\quad ka_k=1-\frac{\pi^2}{4(k+1)}a_{k+2}$$

であるから

$$A=\lim_{k\to\infty}ka_k=\lim_{k\to\infty}\left\{1-\frac{\pi^2}{4(k+1)}a_{k+2}\right\}=1$$

(3) $b_k = ka_k - A = ka_k - 1$ とおくと，(2)の結果より

$$\lim_{k\to\infty} b_k = 0 \quad \cdots ②$$

であり，$a_k = \dfrac{b_k + 1}{k}$ と①より

$$\frac{b_{k+2}+1}{k+2} = \frac{4}{\pi^2}(k+1)\left(-b_k\right) \quad \Leftrightarrow \quad b_k = -\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{1}{(k+1)(k+2)}\left(b_{k+2}+1\right) \quad \cdots ③$$

である。よって

$$k^2 b_k = -\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{k^2}{(k+1)(k+2)}\left(b_{k+2}+1\right) = -\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{k}\right)\left(1+\dfrac{2}{k}\right)}\left(b_{k+2}+1\right)$$

②より $\displaystyle\lim_{k\to\infty} k^2 b_k = -\frac{\pi^2}{4} \quad \cdots ④$

ここで，$G(m,\ n) = k^m a_k - k^n$ とおくと

$$G(m,\ n) = k^m \cdot \frac{b_k+1}{k} - k^n = k^2 b_k \cdot k^{m-3} + k^{m-1} - k^n$$

である。

$m > n \geqq 1$ より $m \geqq 2$ であり，$m-1 \geqq n$ である。

④に注意し，$k^{m-3},\ k^{m-1},\ k^n$ の次数によって場合分けをする。

(ⅰ) $m-1 > n$ のとき

②より $\displaystyle\lim_{k\to\infty} G(m,\ n) = \lim_{k\to\infty}\left(k^2 b_k \cdot k^{m-3} + k^{m-1} - k^n\right) = \lim_{k\to\infty} k^{m-1}\left(b_k + 1 - k^{n-(m-1)}\right) = \infty$

(ⅱ) $m-1 = n$ のとき

④より $\displaystyle\lim_{k\to\infty} G(m,\ n) = \lim_{k\to\infty}\left(k^2 b_k \cdot k^{m-3} + k^{m-1} - k^n\right) = \lim_{k\to\infty} k^2 b_k \cdot k^{m-3} = \begin{cases} 0 & (m=2) \\ -\dfrac{\pi^2}{4} & (m=3) \\ \infty & (m \geqq 4) \end{cases}$

(ⅰ)(ⅱ)より，$G(m,\ n)$ が 0 でない値に収束するのは

$(m,\ n) = (3,\ 2)$

のときであり

$$B = \lim_{k\to\infty} G(3,\ 2) = -\frac{\pi^2}{4}$$

である。

（4） $c_k=G(3,\ 2)-B=k^2b_k+\dfrac{\pi^2}{4}$ とおくと，(3)の結果より

$$\lim_{k\to\infty}c_k=0 \quad \cdots ⑤$$

$b_k=\dfrac{c_k-\dfrac{\pi^2}{4}}{k^2}$ と③より

$$\frac{1}{k^2}\left(c_k-\frac{\pi^2}{4}\right)=-\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{1}{(k+1)(k+2)}\left\{\frac{1}{(k+2)^2}\left(c_{k+2}-\frac{\pi^2}{4}\right)+1\right\}$$

よって

$$c_k=\frac{\pi^2}{4}\left\{\frac{3k+2}{(k+1)(k+2)}-\frac{k^2}{(k+1)(k+2)^3}\left(c_{k+2}-\frac{\pi^2}{4}\right)\right\}$$

となる。⑤より

$$\lim_{k\to\infty}kc_k=\lim_{k\to\infty}\frac{\pi^2}{4}\left\{\frac{k(3k+2)}{(k+1)(k+2)}-\frac{k^3}{(k+1)(k+2)^3}\left(c_{k+2}-\frac{\pi^2}{4}\right)\right\}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{\pi^2}{4}\left\{\frac{3+\dfrac{2}{k}}{\left(1+\dfrac{1}{k}\right)\left(1+\dfrac{2}{k}\right)}-\frac{1}{(k+1)\left(1+\dfrac{2}{k}\right)^3}\left(c_{k+2}-\frac{\pi^2}{4}\right)\right\}$$

$$=\frac{3}{4}\pi^2 \quad \cdots ⑥$$

である。

$$H(p,\ q,\ r)=k^pa_k-k^qA-k^rB=k^pa_k-k^q+\frac{\pi^2}{4}k^r$$

とおくと

$$a_k=\frac{b_k+1}{k}=\frac{\dfrac{1}{k^2}\left(c_k-\dfrac{\pi^2}{4}\right)+1}{k}=c_kk^{-3}-\frac{\pi^2}{4}k^{-3}+k^{-1}$$

より

$$H(p,\ q,\ r)=kc_k\cdot k^{p-4}-\frac{\pi^2}{4}k^{p-3}+k^{p-1}-k^q+\frac{\pi^2}{4}k^r$$

である。

また， $p>q>r\geqq 1$ より $p\geqq 3$ であり， $p-1\geqq q$ ， $p-1>r$ である。

（ｉ） $p-1>q$ のとき

⑥より $\displaystyle\lim_{k\to\infty} H(p,\ q,\ r)=\lim_{k\to\infty} k^{p-1}\left(kc_k\cdot k^{-3}-\frac{\pi^2}{4}k^{-2}+1-k^{q-(p-1)}+\frac{\pi^2}{4}k^{r-(p-1)}\right)=\infty$

（ii） $p-1=q$ のとき

$$H(p,\ q,\ r)=kc_k\cdot k^{p-4}-\frac{\pi^2}{4}k^{p-3}+\frac{\pi^2}{4}k^r$$

である。

（ii-1） $p-3<r$ のとき

$$\lim_{k\to\infty} H(p,\ q,\ r)=\lim_{k\to\infty} k^r\left(kc^k\cdot k^{(p-3)-r-1}-\frac{\pi^2}{4}k^{(p-3)-r}+\frac{\pi^2}{4}\right)=\infty$$

（ii-2） $p-3>r$ のとき

$$\lim_{k\to\infty} H(p,\ q,\ r)=\lim_{k\to\infty} k^{p-3}\left(kc^k\cdot k^{-1}-\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi^2}{4}k^{r-(p-3)}\right)=-\infty$$

（iii-3） $p-3=r$ のとき

$r\geqq 1$ より $p\geqq 4$ であるから

$$\lim_{k\to\infty} H(p,\ q,\ r)=\lim_{k\to\infty} k^{p-3}\left(kc^k\cdot k^{p-4}\right)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}\pi^2 & (p=4)\\ \infty & (p\geqq 5)\end{cases}$$

である。

以上より， $H(p,\ q,\ r)$ が 0 でない値に収束するのは

$$(p,\ q,\ r)=(4,\ 3,\ 1)$$

のときであり，

$$\lim_{k\to\infty} H(4,\ 3,\ 1)=\frac{3}{4}\pi^2$$

である。