



次の問いに答えよ。

(1)  $|x^2 - x - 23|$  の値が, 3 を法として 2 に合同である正の整数  $x$  をすべて求めよ。

(2)  $k$  個の連続した正の整数  $x_1, \dots, x_k$  に対して,

$$|x_j^2 - x_j - 23| \quad (1 \leq j \leq k)$$

の値がすべて素数になる  $k$  の最大値と, その  $k$  に対する連続した正の整数  $x_1, \dots, x_k$  をすべて求めよ。

ここで,  $k$  個の連続した整数とは,

$$x_1, x_1 + 1, x_1 + 2, \dots, x_1 + k - 1$$

となる列のことである。





複素数平面上の異なる 3 点  $A, B, C$  を複素数  $\alpha, \beta, \gamma$  で表す。ここで  $A, B, C$  は同一直線上にないと仮定する。

- (1)  $\triangle ABC$  が正三角形となる必要十分条件は

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$$

であることを示せ。

- (2)  $\triangle ABC$  は正三角形のとき、 $\triangle ABC$  の外接円上の点  $P$  を任意にとる。このとき、

$$AP^2 + BP^2 + CP^2$$

および

$$AP^4 + BP^4 + CP^4$$

を外接円の半径  $R$  を用いて表せ。ただし、2 点  $X, Y$  に対し、 $XY$  とは線分  $XY$  の長さを表す。





座標空間に 5 点

$O(0, 0, 0)$ ,  $A(3, 0, 0)$ ,  $B(0, 3, 0)$ ,  $C(0, 0, 4)$ ,  $P(0, 0, -2)$

をとる。さらに  $0 < a < 3$ ,  $0 < b < 3$  に対して 2 点  $Q(a, 0, 0)$  と  $R(0, b, 0)$  を考える。

- (1) 点  $P, Q, R$  を通る平面を  $H$  とする。平面  $H$  と線分  $AC$  の交点  $T$  の座標, および平面  $H$  と線分  $BC$  の交点  $S$  の座標を求めよ。
- (2) 点  $Q, R, S, T$  が同一円周上にあるための必要十分条件を  $a, b$  を用いて表し, それを満たす点  $(a, b)$  の範囲を座標平面上に図示せよ。





$n$  を正の奇数とする。曲線  $y = \sin x$  ( $(n-1)\pi \leq x \leq n\pi$ ) と  $x$  軸で囲まれた部分を  $D_n$  とする。

直線  $x + y = 0$  を  $\ell$  とおき、 $\ell$  の周りに  $D_n$  を 1 回転させてできる回転体を  $V_n$  とする。

- (1)  $(n-1)\pi \leq x \leq n\pi$  に対して、点  $(x, \sin x)$  を  $P$  とおく。また  $P$  から  $\ell$  に下ろした垂線と  $x$  軸の交点を  $Q$  とする。線分  $PQ$  を  $\ell$  の周りに 1 回転させてできる図形の面積を  $x$  の式で表せ。
- (2) (1)の結果を用いて、回転体  $V_n$  の体積を  $n$  の式で表せ。





$k$  を正の整数とし,  $a_k = \int_0^1 x^{k-1} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx$  とおく。

- (1)  $a_{k+2}$  を  $a_k$  と  $k$  を用いて表せ。
- (2)  $k$  を限りなく大きくするとき, 数列  $\{ka_k\}$  の極限值  $A$  を求めよ。
- (3) (2)の極限值  $A$  に対し,  $k$  を限りなく大きくするとき, 数列

$$\{k^m a_k - k^n A\}$$

が 0 でない値に収束する整数  $m, n$  ( $m > n \geq 1$ ) を求めよ。

またそのときの極限值  $B$  を求めよ。

- (4) (2)と(3)の極限值  $A, B$  に対し,  $k$  を限りなく大きくするとき, 数列

$$\{k^p a_k - k^q A - k^r B\}$$

が 0 ではない値に収束する整数  $p, q, r$  ( $p > q > r \geq 1$ ) を求めよ。

またそのときの極限值を求めよ。

