[東京工業大学 2020 年前期 $\boxed{5}$]

☆ ─── ☆

k を正の整数とし，$a_k = \int_0^1 x^{k-1}\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)dx$ とおく。

(1) a_{k+2} を a_k と k を用いて表せ。

(2) k を限りなく大きくするとき，数列 $\{ka_k\}$ の極限値 A を求めよ。

(3) (2)の極限値 A に対し，k を限りなく大きくするとき，数列

$$\{k^m a_k - k^n A\}$$

が 0 でない値に収束する整数 m, n（$m > n \geqq 1$）を求めよ。

またそのときの極限値 B を求めよ。

(4) (2)と(3)の極限値 A, B に対し，k を限りなく大きくするとき，数列

$$\{k^p a_k - k^q A - k^r B\}$$

が 0 ではない値に収束する整数 p, q, r （$p > q > r \geqq 1$）を求めよ。

またそのときの極限値を求めよ。

☆ ─── ☆

(1) $a_k = \int_0^1 x^{k-1}\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)dx$ より

$$a_{k+2} = \int_0^1 x^{k+1}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$$

$$= \int_0^1 x^{k+1}\left\{-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right\}' dx$$

$$= \left[x^{k+1}\left\{-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right\}\right]_0^1 + (k+1)\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^1 x^k\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$$

$$= (k+1)\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^1 x^k\left\{\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right\}' dx$$

$$= (k+1)\cdot\frac{2}{\pi}\left\{\left[x^k\cdot\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]_0^1 - \frac{2}{\pi}\int_0^1 kx^{k-1}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx\right\}$$

$$=(k+1)\cdot\frac{2}{\pi}\left\{\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}k\int_0^1 x^{k-1}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx\right\}$$

$$=(k+1)\cdot\frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}ka_k\right)$$

$$=\frac{4}{\pi^2}(k+1)\left(1-ka_k\right)$$

よって

$$a_{k+2}=\frac{4}{\pi^2}(k+1)\left(1-ka_k\right)\quad\cdots①$$

（2）$0\leqq x\leqq 1$のとき　$0\leqq\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\leqq 1$，　$x^{k-1}\geqq 0$　であるから

$$0\leqq a_k=\int_0^1 x^{k-1}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx\leqq\int_0^1 x^{k-1}dx$$

よって

$$0\leqq a_k\leqq\frac{1}{k}$$

はさみうちの原理より

$$\lim_{k\to\infty}a_k=0$$

ここで，$a_{k+2}=\frac{4}{\pi^2}(k+1)\left(1-ka_k\right)$ より

$$1-ka_k=\frac{\pi^2}{4(k+1)}a_{k+2}\quad\Leftrightarrow\quad ka_k=1-\frac{\pi^2}{4(k+1)}a_{k+2}$$

であるから

$$A=\lim_{k\to\infty}ka_k=\lim_{k\to\infty}\left\{1-\frac{\pi^2}{4(k+1)}a_{k+2}\right\}=1$$

(3) $b_k = ka_k - A = ka_k - 1$ とおくと，(2)の結果より

$$\lim_{k\to\infty} b_k = 0 \quad \cdots②$$

であり， $a_k = \dfrac{b_k + 1}{k}$ と①より

$$\frac{b_{k+2}+1}{k+2} = \frac{4}{\pi^2}(k+1)\left(-b_k\right) \quad \Leftrightarrow \quad b_k = -\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{1}{(k+1)(k+2)}\left(b_{k+2}+1\right) \quad \cdots③$$

である。よって

$$k^2 b_k = -\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{k^2}{(k+1)(k+2)}\left(b_{k+2}+1\right) = -\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{k}\right)\left(1+\dfrac{2}{k}\right)}\left(b_{k+2}+1\right)$$

②より $\displaystyle\lim_{k\to\infty} k^2 b_k = -\frac{\pi^2}{4} \quad \cdots④$

ここで， $G(m,\ n) = k^m a_k - k^n$ とおくと

$$G(m,\ n) = k^m\cdot\frac{b_k+1}{k} - k^n = k^2 b_k\cdot k^{m-3} + k^{m-1} - k^n$$

である。

$m > n \geqq 1$ より $m \geqq 2$ であり， $m-1 \geqq n$ である。

④に注意し， $k^{m-3},\ k^{m-1},\ k^n$ の次数によって場合分けをする。

(ⅰ) $m-1 > n$ のとき

②より $\displaystyle\lim_{k\to\infty} G(m,\ n) = \lim_{k\to\infty}\left(k^2 b_k\cdot k^{m-3} + k^{m-1} - k^n\right) = \lim_{k\to\infty} k^{m-1}\left(b_k + 1 - k^{n-(m-1)}\right) = \infty$

(ⅱ) $m-1 = n$ のとき

④より $\displaystyle\lim_{k\to\infty} G(m,\ n) = \lim_{k\to\infty}\left(k^2 b_k\cdot k^{m-3} + k^{m-1} - k^n\right) = \lim_{k\to\infty} k^2 b_k\cdot k^{m-3} = \begin{cases} 0 & (m=2) \\ -\dfrac{\pi^2}{4} & (m=3) \\ \infty & (m \geqq 4) \end{cases}$

(ⅰ)(ⅱ)より， $G(m,\ n)$ が 0 でない値に収束するのは

$(m,\ n) = (3,\ 2)$

のときであり

$$B = \lim_{k\to\infty} G(3,\ 2) = -\frac{\pi^2}{4}$$

である。

(4) $c_k = G(3,\,2) - B = k^2 b_k + \dfrac{\pi^2}{4}$ とおくと，(3)の結果より

$$\lim_{k\to\infty} c_k = 0 \quad \cdots ⑤$$

$b_k = \dfrac{c_k - \dfrac{\pi^2}{4}}{k^2}$ と③より

$$\frac{1}{k^2}\left(c_k - \frac{\pi^2}{4}\right) = -\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{1}{(k+1)(k+2)}\left\{\frac{1}{(k+2)^2}\left(c_{k+2} - \frac{\pi^2}{4}\right)+1\right\}$$

よって

$$c_k = \frac{\pi^2}{4}\left\{\frac{3k+2}{(k+1)(k+2)} - \frac{k^2}{(k+1)(k+2)^3}\left(c_{k+2} - \frac{\pi^2}{4}\right)\right\}$$

となる。⑤より

$$\lim_{k\to\infty} kc_k = \lim_{k\to\infty}\frac{\pi^2}{4}\left\{\frac{k(3k+2)}{(k+1)(k+2)} - \frac{k^3}{(k+1)(k+2)^3}\left(c_{k+2} - \frac{\pi^2}{4}\right)\right\}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{\pi^2}{4}\left\{\frac{3+\dfrac{2}{k}}{\left(1+\dfrac{1}{k}\right)\left(1+\dfrac{2}{k}\right)} - \frac{1}{(k+1)\left(1+\dfrac{2}{k}\right)^3}\left(c_{k+2} - \frac{\pi^2}{4}\right)\right\}$$

$$= \frac{3}{4}\pi^2 \quad \cdots ⑥$$

である。

$$H(p,\,q,\,r) = k^p a_k - k^q A - k^r B = k^p a_k - k^q + \frac{\pi^2}{4}k^r$$

とおくと

$$a_k = \frac{b_k + 1}{k} = \frac{\dfrac{1}{k^2}\left(c_k - \dfrac{\pi^2}{4}\right)+1}{k} = c_k k^{-3} - \frac{\pi^2}{4}k^{-3} + k^{-1}$$

より

$$H(p,\,q,\,r) = kc_k\cdot k^{p-4} - \frac{\pi^2}{4}k^{p-3} + k^{p-1} - k^q + \frac{\pi^2}{4}k^r$$

である。

また， $p > q > r \geqq 1$ より $p \geqq 3$ であり， $p-1 \geqq q$， $p-1 > r$ である。

（ｉ） $p-1>q$ のとき

⑥より $\lim_{k\to\infty} H(p,\ q,\ r)=\lim_{k\to\infty} k^{p-1}\left(kc_k\cdot k^{-3}-\frac{\pi^2}{4}k^{-2}+1-k^{q-(p-1)}+\frac{\pi^2}{4}k^{r-(p-1)}\right)=\infty$

（ii） $p-1=q$ のとき

$$H(p,\ q,\ r)=kc_k\cdot k^{p-4}-\frac{\pi^2}{4}k^{p-3}+\frac{\pi^2}{4}k^r$$

である。

（ii-1） $p-3<r$ のとき

$$\lim_{k\to\infty} H(p,\ q,\ r)=\lim_{k\to\infty} k^r\left(kc^k\cdot k^{(p-3)-r-1}-\frac{\pi^2}{4}k^{(p-3)-r}+\frac{\pi^2}{4}\right)=\infty$$

（ii-2） $p-3>r$ のとき

$$\lim_{k\to\infty} H(p,\ q,\ r)=\lim_{k\to\infty} k^{p-3}\left(kc^k\cdot k^{-1}-\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi^2}{4}k^{r-(p-3)}\right)=-\infty$$

（iii-3） $p-3=r$ のとき

$r\geqq 1$ より $p\geqq 4$ であるから

$$\lim_{k\to\infty} H(p,\ q,\ r)=\lim_{k\to\infty} k^{p-3}\left(kc^k\cdot k^{p-4}\right)=\begin{cases}\frac{3}{4}\pi^2 & (p=4)\\ \infty & (p\geqq 5)\end{cases}$$

である。

以上より， $H(p,\ q,\ r)$ が 0 でない値に収束するのは

$(p,\ q,\ r)=(4,\ 3,\ 1)$

のときであり，

$$\lim_{k\to\infty} H(4,\ 3,\ 1)=\frac{3}{4}\pi^2$$

である。