[東京工業大学 2020 年前期 $\boxed{4}$]

☆―――☆

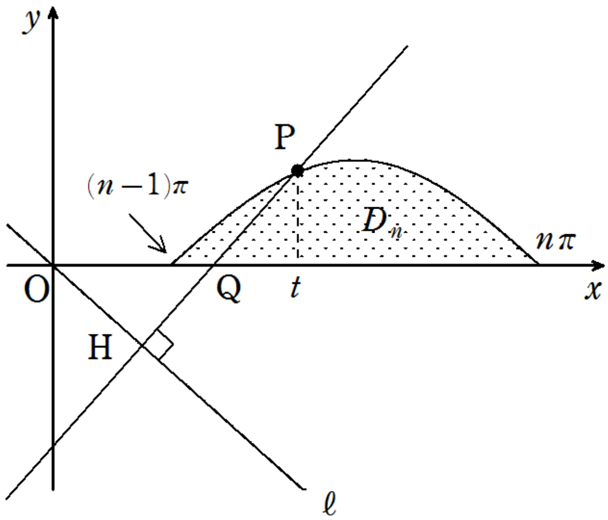
nを正の奇数とする。曲線$y=\sin x$（$(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$）と$x$軸で囲まれた部分を$D_n$とする。直線$x+y=0$を$\ell$とおき，$\ell$の周りに$D_n$を1回転させてできる回転体を$V_n$とする。

(1) $(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$に対して，点$(x, \sin x)$をPとおく。またPから$\ell$に下ろした垂線と$x$軸の交点をQとする。線分PQを$\ell$の周りに1回転させてできる図形の面積を$x$の式で表せ。

(2) (1)の結果を用いて，回転体V_nの体積をnの式で表せ。

☆―――☆

(1) nは正の奇数であるから，D_nはxの上側にあり，Pからℓに下ろした垂線の足をHとすると，P, Q, Hはこの順に並ぶ。



求める面積は $\pi\left(\mathrm{PH}^2-\mathrm{QH}^2\right)$ である。

$\mathrm{P}(t, \sin t)$（$(n-1)\pi \leqq t \leqq n\pi$）とおく。

直線PHの方程式は$\ell: x+y=0$に垂直であるから，

$$y-\sin t=1(x-t) \iff y=x+\sin t-t$$

これより

$$\mathrm{Q}(t-\sin t,\ 0),\quad \mathrm{H}\left(\frac{t-\sin t}{2},\ \frac{\sin t-t}{2}\right)$$

である。

よって

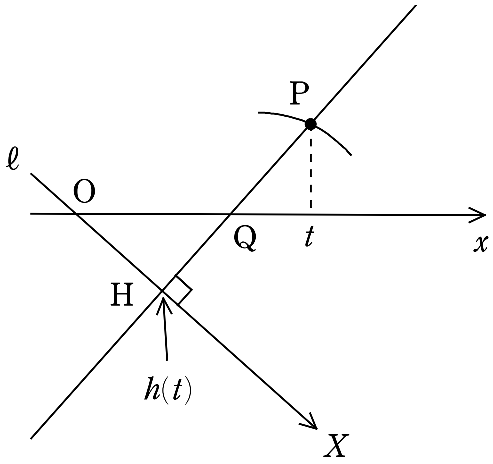
$$\pi\left(\mathrm{PH}^2-\mathrm{QH}^2\right)=\pi\left\{\left(\frac{t+\sin t}{2}\right)^2+\left(\frac{\sin t+t}{2}\right)^2-\left(\frac{t-\sin t}{2}\right)^2-\left(\frac{\sin t-t}{2}\right)^2\right\}$$

$$=\pi\cdot 2t\sin t$$

よって，求める図形の面積をxを用いて表すと $2\pi x\sin x$

(2) ℓ を X 軸（O を原点，x 座標が増える向きを正)，H の X 座標 OH を $h(t)$ とし，

$S(t) = 2\pi t \sin t$　とおく。



このとき，求める体積は $\displaystyle\int_{h((n-1)\pi)}^{h(n\pi)} S(t)dX$　である。

変数を t に置換すると

$$X = h(t) = \mathrm{OH} = \frac{1}{\sqrt{2}}(t - \sin t)\ \text{より}\quad dX = h'(t)dt$$

$$X : h((n-1)\pi) \to h(n\pi)\ \text{のとき}\quad t : (n-1)\pi \to n\pi$$

であるから

$$\int_{h((n-1)\pi)}^{h(n\pi)} S(t)dX = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\cos t)dt = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} S(t)h'(t)dt = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} 2\pi t \sin t \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\cos t)dt$$

$$= \sqrt{2}\pi \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} t \sin t dt - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} t \sin 2t dt$$

ここで，右辺第 1 項の積分について

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} t \sin t dt = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} t(-\cos t)' dt = \Big[-t\cos t\Big]_{(n-1)\pi}^{n\pi} + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \cos t dt = \Big[-t\cos t + \sin t\Big]_{(n-1)\pi}^{n\pi}$$

$$= -n\pi \cos n\pi + (n-1)\pi \cos(n-1)\pi$$

$$= n\pi + (n-1)\pi \qquad (\because n\ \text{は奇数})$$

$$= (2n-1)\pi$$

右辺第 2 項の積分について

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} t \sin 2t dt = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} t\left(-\frac{1}{2}\cos 2t\right)' dt = \left[-\frac{1}{2}t\cos t\right]_{(n-1)\pi}^{n\pi} + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{1}{2}\cos 2t dt$$

$$= \left[-\frac{1}{2}t\cos t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_{(n-1)\pi}^{n\pi}$$

$$= -\frac{1}{2}(n\pi) + \frac{1}{2}(n-1)\pi$$

$$= -\frac{\pi}{2}$$

したがって，求める体積 V_n は

$$V_n = \sqrt{2}\pi \cdot (2n-1)\pi - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\left(2n - \frac{3}{4}\right)\pi^2$$