［ 東京工業大学 2020 年前期 $\boxed{3}$ ］

座標空間に 5 点

$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}(3,\ 0,\ 0),\ \mathrm{B}(0, 3,\ 0),\ \mathrm{C}(0,\ 0, 4),\ \mathrm{P}(0,\ 0,\ -2)$

をとる。さらに $0<a<3,\ 0<b<3$ に対して 2 点 $\mathrm{Q}(a,\ 0,\ 0)$ と $\mathrm{R}(0,\ b,\ 0)$ を考える。

(1) 点 P, Q, R を通る平面を H とする。平面 H と線分 AC の交点 T の座標，および平面 H と線分 BC の交点 S の座標を求めよ。

(2) 点 Q, R, S, T が同一円周上にあるための必要十分条件を $a,\ b$ を用いて表し，それを満たす点 $(a,\ b)$ の範囲を座標平面上に図示せよ。

---

(1) P, Q, A, C は xz 平面上の点であるから，y 座標はそれぞれ 0 であり，zx 平面上で直線 AC，PQ の交点が T である。

直線 AC ： $\dfrac{x}{3}+\dfrac{z}{4}=1$，直線 PQ ： $\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{-2}=1$

これらを連立させて解くと， $x=\dfrac{9a}{2a+3}$， $z=\dfrac{12-4a}{2a+3}$

よって $\mathrm{T}\left(\dfrac{9a}{2a+3},\ 0,\ \dfrac{12-4a}{2a+3}\right)$

また， P, R, B, C は yz 平面上の点であるから， x 座標はそれぞれ 0 であり， zx 平面上で直線 BC， PR の交点が S である。

直線 BC ： $\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1$，直線 PR ： $\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{-2}=1$

これらをれ連立させて解くと， $y=\dfrac{9b}{2a+3}$， $z=\dfrac{12-4b}{2a+3}$

よって $\mathrm{S}\left(0,\ \dfrac{9b}{2a+3},\ \dfrac{12-4b}{2a+3}\right)$

(2) $0<a<3$， $0<b<3$ のもとで， Q, R, S, T が同一円周上にあるための必要十分条件は，

法べきの定理とその逆により $\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PT}=\mathrm{PR}\cdot\mathrm{PS}$ …①

ここで， P, Q, T の x 座標について

$\mathrm{PQ}:\mathrm{PT}=a:\dfrac{9a}{2a+3}$ より $\mathrm{PT}=\dfrac{9}{2a+3}\mathrm{PQ}$ であるから，$\mathrm{PT}\cdot\mathrm{PQ}=\dfrac{9}{2a+3}\mathrm{PQ}^2$ …②

P, Q, S の x 座標についても同様に

$\mathrm{PR}:\mathrm{PS}=b:\dfrac{9b}{2b+3}$ より $\mathrm{PS}=\dfrac{9}{2b+3}\mathrm{PR}$ であるから，$\mathrm{PS}\cdot\mathrm{PR}=\dfrac{9}{2b+3}\mathrm{PR}^2$ …③

①②③より

$$\frac{9}{2a+3}\mathrm{PQ}^2=\frac{9}{2b+3}\mathrm{PR}^2$$

したがって

$$(2b+3)(a^2+4)=(2a+3)(b^2+4) \iff 2a^2b-2ab^2+8b-8a+3a^2-3b^2=0$$

$$\iff (a-b)(2ab+3a+3b-8)=0$$

より

$a-b=0$ または $2ab+3a+3b-8=0$ …（＊）

$2ab+3a+3b-8=0 \iff (2a+3)b=-3a+8$

$$\iff b=\frac{-3a+8}{2a+3}=-\frac{3}{2}+\frac{\frac{25}{4}}{a+\frac{3}{2}} \quad \cdots ④$$

であるから，④は $a=-\dfrac{3}{2}$, $b=-\dfrac{3}{2}$ を漸近線とする双曲線（の一部）である。

よって（＊）を図示すると次の図の実線部分になる。ただし，○は含まない。