[東京工業大学 2020 年前期 $\boxed{2}$]

☆────────────────────────☆

複素数平面上の異なる 3 点 A, B, C を複素数 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ で表す。ここで A, B, C は同一直線上にないと仮定する。

(1) △ABC が正三角形となる必要十分条件は

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$$

であることを示せ。

(2) △ABC は正三角形のとき，△ABC の外接円上の点 P を任意にとる。このとき，

$$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$$

および

$$\mathrm{AP}^4+\mathrm{BP}^4+\mathrm{CP}^4$$

を外接円の半径 R を用いて表せ。ただし，2 点 X, Y に対し， XY とは線分 XY の長さを表す。

☆────────────────────────☆

(1) 60° 回転を表す複素数を c とすると

$$c=\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\qquad c^{-1}=\cos\left(-60^\circ\right)+i\sin\left(-60^\circ\right)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

である。

△ABC が正三角形となるとき，

「$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を 60° 回転したものが $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$」または「$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を -60° 回転したものが $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$」

であるから，

$$\gamma-\alpha=c\left(\beta-\alpha\right)\ \text{ または }\ \gamma-\alpha=c^{-1}\left(\beta-\alpha\right)$$

$$\left\{\gamma-\alpha-c\left(\beta-\alpha\right)\right\}\left\{\gamma-\alpha-c^{-1}\left(\beta-\alpha\right)\right\}=0$$

$$\left(\gamma-\alpha\right)^2+\left(\beta-\alpha\right)^2-\left(c+c^{-1}\right)\left(\gamma-\beta\right)\left(\beta-\alpha\right)=0$$

ここで， $c+c^{-1}=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=1$ であるから

$$\gamma^2-2\alpha\gamma+\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta+\beta^2-\left(\beta\gamma-\alpha\gamma-\alpha\beta+\alpha^2\right)=0\ \Leftrightarrow\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$$

（2）△ABC の外接円の中心を O， $\mathrm{P}(p)$ とすると

$$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$$

$$=|p-\alpha|^2+|p-\beta|^2+|p-\gamma|^2$$

$$=(p-\alpha)\left(\overline{p}-\overline{\alpha}\right)+(p-\beta)\left(\overline{p}-\overline{\beta}\right)+(p-\gamma)\left(\overline{p}-\overline{\gamma}\right)$$

$$=3|p|^2+|\alpha|^2+|\beta|^2+|\gamma|^2-p\left(\overline{\alpha}+\overline{\beta}+\overline{\gamma}\right)-\overline{p}(\alpha+\beta+\gamma) \quad \cdots①$$

ここで，△ABC の重心は O であることより $\alpha+\beta+\gamma=0$，および $|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=|p|=R$ より

$$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2=3R^2+R^2+R^2+R^2-p\cdot\overline{0}-\overline{p}\cdot 0=6R^2$$

次に，$|p-\alpha|^4=\left\{(p-\alpha)\left(\overline{p}-\overline{\alpha}\right)\right\}$

$$=\left(2R^2-p\overline{\alpha}-\overline{p}\alpha\right)^2$$

$$=4R^4-4R^2\left(p\overline{\alpha}+\overline{p}\alpha\right)+p^2\overline{\alpha}^2+2|p|^2|\alpha|^2+\overline{p}^2\alpha^2$$

であるので，

$$\mathrm{AP}^4+\mathrm{BP}^4+\mathrm{CP}^4=|p-\alpha|^4+|p-\beta|^4+|p-\gamma|^4$$

$$=3\times\left(4R^4+2R^4\right)-4R^2\left\{p\left(\overline{\alpha}+\overline{\beta}+\overline{\gamma}\right)+\overline{p}(\alpha+\beta+\gamma)\right\}$$

$$+p^2\left(\overline{\alpha}^2+\overline{\beta}^2+\overline{\gamma}^2\right)+\overline{p}^2\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)$$

$$=18R^4+p^2\left(\overline{\alpha}^2+\overline{\beta}^2+\overline{\gamma}^2\right)+\overline{p}^2\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)$$

となる。ここで，

$\alpha+\beta+\gamma=0$ より $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$$=0^2-2\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)$$

であるから

$3\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)=0$ より $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0$

よって

$$\mathrm{AP}^4+\mathrm{BP}^4+\mathrm{CP}^4=18R^4$$