[東京工業大学 2020 年前期 $\boxed{2}$]

☆ ☆

複素数平面上の異なる 3 点 A, B, C を複素数 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ で表す。ここで A, B, C は同一直線上にないと仮定する。

(1) △ABC が正三角形となる必要十分条件は

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$$

であることを示せ。

(2) △ABC は正三角形のとき，△ABC の外接円上の点 P を任意にとる。このとき，

$$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$$

および

$$\mathrm{AP}^4+\mathrm{BP}^4+\mathrm{CP}^4$$

を外接円の半径 R を用いて表せ。ただし，2 点 X, Y に対し，XY とは線分 XY の長さを表す。

☆ ☆