［ 東京工業大学 2020 年前期 $\boxed{1}$ ］

次の問いに答えよ。

(1)　$\left|x^2-x-23\right|$の値が，3 を法として 2 に合同である正の整数 x をすべて求めよ。

(2)　k 個の連続した正の整数 $x_1, \cdots, x_k$ に対して，

$$\left|{x_j}^2-x_j-23\right| \quad (1 \leqq j \leqq k)$$

の値がすべて素数になる k の最大値と，その k に対する連続した正の整数 $x_1, \cdots, x_k$ をすべて求めよ。

ここで，k 個の連続した整数とは，

$$x_1,\ x_1+1,\ x_1+2,\ \cdots,\ x_1+k-1$$

となる列のことである。

(1)　$f(x)=x^2-x-23$　とおく。以下，合同式はすべて $\mathrm{mod}\,3$ とする。

$\left|f(1)\right|=\left|1-1-23\right|=23\equiv 2$，　$\left|f(2)\right|=\left|4-2-23\right|=21\equiv 0$

$\left|f(3)\right|=\left|9-3-23\right|=17\equiv 2$，　$\left|f(4)\right|=\left|16-4-23\right|=11\equiv 2$

$\left|f(5)\right|=\left|25-5-23\right|=3\equiv 0$，　$\left|f(6)\right|=\left|36-6-23\right|=7\equiv 1$

となる。

$x\geqq 6$ のとき，$f(x)=x(x-1)-23\geqq f(6)>0$　より　$\left|f(x)\right|=f(x)$　である。

・ $x\equiv 0$ のとき

$f(x)\equiv 0-0-23=-23\equiv 1$

・ $x\equiv 1$ のとき

$f(x)\equiv 1-1-23=-23\equiv 1$

・ $x\equiv 2$ のとき

$f(x)\equiv 4-2-23=-21\equiv 0$

であるから，$\left|f(x)\right|\equiv 2$ となる正の整数 x は　$1,\ 3,\ 4$

(2) x_1を正の整数として，

k 個の整数 $|f(x_1)|, |f(x_1+1)|, \cdots\cdots, |f(x_1+k-1)|$ がすべて素数であるとする。

(1)より $x \equiv 2$ かつ $x \geqq 6$ のとき，$|f(x)|$ は $f(6)=7$ 以上の 3 の倍数になるので，素数ではない。

3 つの連続する整数 x_1，x_1+1, x_2+2 の中には 3 を法として 2 と合同になるものが存在するので，

$x_1 \geqq 6$ のとき，$k \leqq 2$ である。

また，$|f(1)|$ が素数で $|f(2)|$ が素数でないから，$x_1=1$ ならば $k=1$ である。

そして，$|f(3)|, |f(4)|, |f(5)|, |f(6)|$ および $|f(7)|=|49-7-23|=19$ がすべて素数であることから

k の最大値は 5 であり，このときの $x_1, \cdots, x_k$ は，$3, 4, 5, 6, 7$ である。