[ 東京工業大学 2019 年前期 $\boxed{1}$ ]

☆――――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) $h>0$とする。座標平面上の点$\mathrm{O}(0,\,0)$，点$\mathrm{P}(h,\,s)$，点$\mathrm{Q}(h,\,t)$に対して三角形OPQの面積を$S$とする。ただし，$s<t$とする。

三角形OPQの辺OP, OQ, PQの長さをそれぞれ$p,\,q,\,r$とするとき，不等式

$$p^2+q^2+r^2 \geqq 4\sqrt{3}S$$

が成り立つことを示せ。また，等号が成立するときの$s,\,t$の値を求めよ。

(2) 四面体ABCDの表面積を$T$，辺BC, CA, ABの長さをそれぞれ$a,\,b,\,c$とし，辺AD, BD, CDの長さをそれぞれ$\ell,\,m,\,n$とする。このとき，不等式

$$a^2+b^2+c^2+\ell^2+m^2+n^2 \geqq 2\sqrt{3}T$$

が成り立つことを示せ。また，等号が成立するのは四面体ABCDがどのような四面体のときか答えよ。

☆――――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1)
$$\begin{aligned}
p^2+q^2+r^2-4\sqrt{3}S &= (h^2+s^2)+(h^2+t^2)+(t-s)^2-4\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}(t-s)h \\
&= 2h^2-2\sqrt{3}(t-s)h+s^2+t^2+(t-s)^2 \\
&= 2\left\{h-\frac{\sqrt{3}}{2}(t-s)\right\}^2-\frac{3}{2}(t-s)^2+s^2+t^2+(t-s)^2 \\
&= 2\left\{h^2-\sqrt{3}(t-s)h\right\}+s^2+t^2+(t-s)^2 \\
&= 2\left\{h-\frac{\sqrt{3}}{2}(t-s)\right\}^2+\frac{1}{2}s^2+st+\frac{1}{2}t^2 \\
&= 2\left\{h-\frac{\sqrt{3}}{2}(t-s)\right\}^2+\frac{1}{2}\left(s+t\right)^2 \geqq 0
\end{aligned}$$

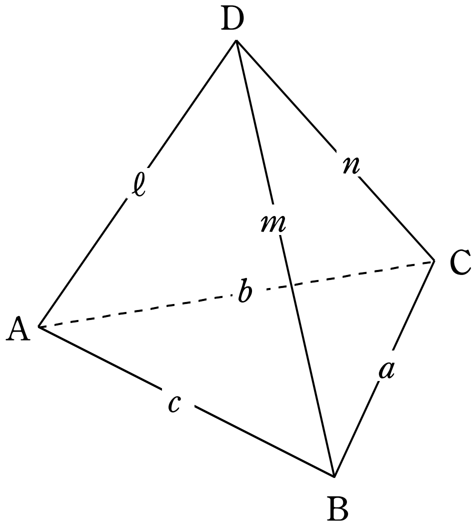
となる。

等号が成立するのは，$h-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(t-s)=0$ かつ $s+t=0$

すなわち $s=-\dfrac{h}{\sqrt{3}},\ t=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$ のとき。このとき，三角形OPQは正三角形である。

(2) 三角形ABC, ADC, ADB, BCDの面積を $S_1, S_2, S_3, S_4$ とすると

(1)の結果より




$$a^2+b^2+c^2 \geqq 4\sqrt{3}S_1$$

$$b^2+n^2+\ell^2 \geqq 4\sqrt{3}S_2$$

$$\ell^2+m^2+c^2 \geqq 4\sqrt{3}S_3$$

$$a^2+m^2+n^2 \geqq 4\sqrt{3}S_4$$

が成り立つ。

これらの辺々を加えて

$$2\left(a^2+b^2+c^2+\ell^2+m^2+n^2\right) \geqq 4\sqrt{3}\left(S_1+S_2+S_3+S_4\right)=4\sqrt{3}T$$

を得る。等号が成立するのは，三角形ABC, ADC, ADB, BCDがすべて正三角形のときであり，

このとき四面体ABCDは正四面体になる。

[ 東京工業大学 2019 年前期 $\boxed{2}$ ]

次の等式が $1 \leqq x \leqq 2$ で成り立つような関数 $f(x)$ と定数 $A,\ B$ を求めよ。

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} |\log y|\, f(xy)\, dy = 3x(\log x - 1) + A + \frac{B}{x}$$

ただし，$f(x)$ は $1 \leqq x \leqq 2$ に対して定義される連続関数とする。

---

$xy = t$ とおくと，

$xdy = dt$

$y: \dfrac{1}{x} \to \dfrac{2}{x}$ のとき　$t: 1 \to 2$ であり

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} |\log y|\, f(xy)\, dy = \int_1^2 \left|\log \frac{t}{x}\right| f(t) \cdot \frac{1}{x}\, dt = \frac{1}{x}\int_1^2 |\log t - \log x|\, f(t)\, dt$$

となるから，与えられた等式は

$$\frac{1}{x}\int_1^2 |\log t - \log x|\, f(t)\, dt = 3x(\log x - 1) + A + \frac{B}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_1^2 |\log t - \log x|\, f(t)\, dt = 3x^2(\log x - 1) + Ax + B \quad \cdots ①$$

となる。$1 \leqq x \leqq 2$ であるからこれは

$$\int_1^x (\log x - \log t)\, f(t)\, dt + \int_x^2 (\log t - \log x)\, f(t)\, dt = 3x^2(\log x - 1) + Ax + B$$

$$\Leftrightarrow \quad \log x \int_1^x f(t)\, dt - \int_1^x (\log t)\, f(t)\, dt - \int_2^x (\log t)\, f(t)\, dt + \log x \int_2^x f(t)\, dt = 3x^2(\log x - 1) + Ax + B$$

$\cdots ①$

となる。この式の両辺を $x$ で微分して

$$\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\, dt + (\log x)\, f(x) - (\log x)\, f(x) - (\log x)\, f(x) + \frac{1}{x}\int_2^x f(t)\, dt + (\log x)\, f(x)$$

$$= 6x(\log x - 1) + 3x + A$$

整理すると

$$\int_1^x f(t)\, dt + \int_2^x f(t)\, dt = 6x^2 \cdot \log x - 3x^2 + Ax \quad \cdots ②$$

さらに，この式の両辺を $x$ で微分して

$$f(x)+f(x)=12x\log x+6x^2\cdot\frac{1}{x}-6x+A$$

よって　$f(x)=6x\log x+\dfrac{A}{2}$

ここで，②で $x=1$， $x=2$ とすると

$$\int_2^1 f(t)\,dt=-3+A \quad \cdots③$$

$$\int_1^2 f(t)\,dt=24\log 2-12+2A \quad \cdots④$$

③，④を辺々加えて

$$0=24\log 2-15+3A$$

したがって

$$A=5-8\log 2$$

であるから

$$f(x)=6x\log x+\frac{5}{2}-4\log 2$$

を得る。また，①で $x=1$， $x=2$ とすると

$$-\int_2^1\left(\log t\right)f(t)\,dt=-3+A+B \quad \cdots⑤$$

$$\log 2\int_1^2 f(t)\,dt-\int_1^2\left(\log t\right)f(t)\,dt=12(\log 2-1)+2A+B \quad \cdots⑥$$

⑤，⑥を辺々加えて

$$\log 2\int_1^2 f(t)\,dt=12\log 2-15+3A+2B$$

$\displaystyle\int_1^2 f(t)\,dt=3-A$ であるから

$$\log 2(3-A)=12\log 2-15+3A+2B$$

$$\log 2\left\{3-\left(5-8\log 2\right)\right\}=12\log 2-15+3\left(5-8\log 2\right)+2B$$

よって　$B=4\left(\log 2\right)^2+5\log 2$

以上より，　$f(x)=6x\log x+\dfrac{5}{2}-4\log 2$

$A=5-8\log 2$，　$B=4\left(\log 2\right)^2+5\log 2$

[ 東京工業大学 2019 年前期 $\boxed{3}$ ]

$i$ を虚数単位とする。実部と虚部が共に整数であるような複素数 $z$ により $\dfrac{z}{3+2i}$ と表される複素数全体の集合を $M$ とする。

(1) 原点を中心とする半径 $r$ の円上またはその内部に含まれる $M$ の要素の個数を $N(r)$ とする。

このとき，集合 $\{r \mid 10 \leqq N(r) < 25\}$ を求めよ。

(2) 複素数平面の相異なる 2 点 $z,\ w$ を結ぶ線分を $L(z,\ w)$ で表すとき，6 つの線分

$L(0, 1)$， $L\left(1, 1+\dfrac{i}{2}\right)$， $L\left(1+\dfrac{i}{2}, \dfrac{1+i}{2}\right)$， $L\left(\dfrac{1+i}{2}, \dfrac{1}{2}+i\right)$， $L\left(\dfrac{1}{2}+i, i\right)$， $L(i,\ 0)$ で囲まれる

領域の内部または境界に含まれる $M$ の要素の個数を求めよ。

(1) $w = \dfrac{z}{3+2i}$ とおく。

実部と虚部が共に整数であるような複素数全体の集合を $N$ とすると

$z \in N$ のとき　$w = \dfrac{z}{3+2i} \in M$

$w \in M$ のとき　$z = w(3+2i) \in N$

となるので， $M,\ N$ の要素は 1 対 1 に対応する。

$$|w| = \left|\frac{z}{3+2i}\right| = \frac{|z|}{|3+2i|} = \frac{z|}{\sqrt{13}}$$ より

$$|w| \leqq r \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|z|}{\sqrt{13}} \leqq r$$

$$\Leftrightarrow \quad |z| \leqq \sqrt{13}\,r$$

となるから， $N(r)$ は絶対値が $\sqrt{13}\,r$ 以下の $N$ の要素の個数に等しい。

$z = x + yi$ のとき，$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ であり，

$x,\ y$ が整数のとき， $x^2+y^2$ は 0 以上の整数になる。

図のように原点を中心とする円を考え，

半径を少しずつ広げていくと，

$|z|=0 \quad \Leftrightarrow \quad z=0$（1 個）

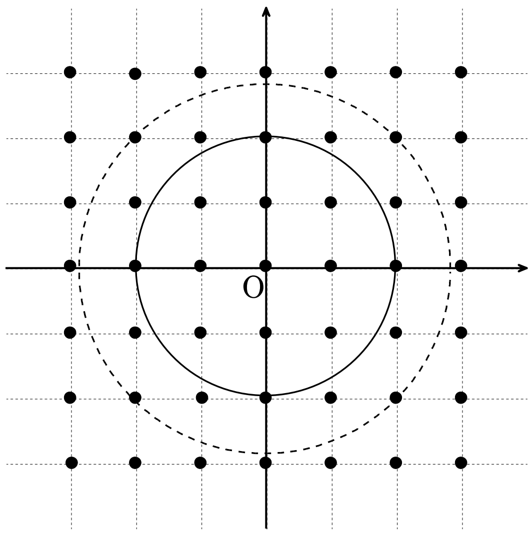
$|z|=\sqrt{1}=1 \quad \Leftrightarrow \quad z=\pm1,\ \pm i$ （4 個）

$|z|=\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad z=\pm1\pm i$（複号任意，4 個）

$|z|=\sqrt{3}$　となる $z$ はない

$|z|=\sqrt{4}=2 \quad \Leftrightarrow \quad z=\pm2,\ \pm2i$（4 個）

$|z|=\sqrt{5} \quad \Leftrightarrow \quad z=\pm1\pm2i,\ \pm2\pm i$（複号任意，8 個）




$|z|=\sqrt{6}$　となる $z$ はない

$|z|=\sqrt{7}$　となる $z$ はない

$|z|=\sqrt{8}=2\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad z=\pm2\pm2i$（4 個）

よって

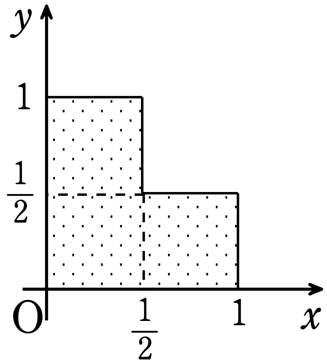
$\sqrt{13}r<2$　のときは，$N(r) \leqq 1+4+4=9$

$2 \leqq \sqrt{13}r<2\sqrt{2}$　のときは，$1+4+4+4 \leqq N(r)<1+4+4+4+8 \quad \Leftrightarrow \quad 13 \leqq N(r) \leqq 21$

$\sqrt{13}r \geqq 2\sqrt{2}$　のときは，$N(r) \geqq 1+4+4+4+8+4=25$

となるので，集合$\{r\,|\,10 \leqq N(r)<25\}$は　$\dfrac{2}{\sqrt{13}} \leqq r < \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$

(2）題意の領域$W$は右図の打点部分である。




この領域に$w$があるとき，

$z=(3+2i)w$が存在する領域は

$$1\times(3+2i)=3+2i$$

$$\left(1+\frac{i}{2}\right)\times(3+2i)=2+\frac{7}{2}i$$

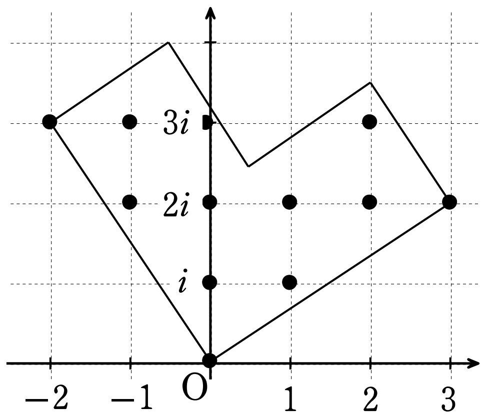
$$\frac{1+i}{2}\times(3+2i)=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i$$

$$\left(\frac{1}{2}+i\right)\times(3+2i)=-\frac{1}{2}+4i$$

$$i\times(3+2i)=-2+3i$$

であることから，$W$を複素数平面上で $3+2i$ 倍することにより

拡大および回転してできる右図の直線で囲まれる領域である。




求める集合の個数は，この領域（直線上も含む）にある実部

および虚部が整数である複素数の個数である。

したがって，図より12個

［ 東京工業大学 2019 年前期 $\boxed{4}$ ］

$H_1, \cdots, H_n$ を空間内の相異なる $n$ 枚の平面とする。

$H_1, \cdots, H_n$ によって，空間が $T(H_1, \cdots, H_n)$ 個の空間領域に分割されるとする。

例えば，空間の座標を $(x, y, z)$ とするとき，

●平面 $x=0$ を $H_1$，平面 $y=0$ を $H_2$，平面 $z=0$ を $H_3$ とすると $T(H_1, H_2, H_3)=8$，

●平面 $x=0$ を $H_1$，平面 $y=0$ を $H_2$，平面 $x+y=1$ を $H_3$ とすると $T(H_1, H_2, H_3)=7$，

●平面 $x=0$ を $H_1$，平面 $x=1$ を $H_2$，平面 $y=0$ を $H_3$ とすると $T(H_1, H_2, H_3)=6$，

●平面 $x=0$ を $H_1$，平面 $y=0$ を $H_2$，平面 $z=0$ を $H_3$，平面 $x+y+z=1$ を $H_4$ とすると

$T(H_1, H_2, H_3, H_4)=15$，

である。

(1) 各 $n$ に対して $T(H_1, \cdots, H_n)$ のとりえる値のうち最も大きいものを求めよ。

(2) 各 $n$ に対して $T(H_1, \cdots, H_n)$ のとりうる値のうち 2 番目に大きいものを求めよ。

ただし $n \geqq 2$ とする。

(3) 各 $n$ に対して $T(H_1, \cdots, H_n)$ のとりうる値のうち 3 番目に大きいものを求めよ。

ただし $n \geqq 3$ とする。

平面に $n$ 本の直線を引くとき，平面が $S$ 個の領域に分割されるものとする。

$S$ のうち，最も大きいものを $a_n$，2 番目に大きいものを $b_n$ とすると $a_1=2$ であり，$b_1$ はない。

「どの 2 本も平行でなく，どの 3 本も 1 点で交わらない」…（＊）

ように $n$ 本の直線があるとき，$n+1$ 本目の直線を（＊）を満たすように引くと，その直線は既にある $n$ 本の直線と $n$ 個の点で交わり，$n+1$ 個の線分または半直線に分けられる。それらによって，平面領域が 1 つずつ増えるので，

$$a_{n+1}=a_n+n+1$$

が成り立つ。$a_1=2$ より $n \geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)=2+\sum_{k=2}^{n}k=2+\sum_{k=1}^{n}k-1=1+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}n(n+1)+1$$

これは $n=1$ のときも成り立つ。

次に，$b_n$ について考える。$n$ 本の直線により平面が $a_n$ 個の領域に分割されているとする。

このとき，$n+1$本目の直線を

・既にある直線のいずれかと平行

・既にある交点のうち１つだけを通る

のいずれかを満たすように引くと，$n+1$本目の直線と元々ある $n$ 本の直線との交点は $n$ 個増える。

よって，$b_n = a_n - 1$（$n \geqq 2$）が実現する。

(1) 求める値を $x_n$ とする。$x_1 = 2$ である。

空間に $n$ 枚の平面 $H_1, \cdots, H_n$ があり，$H_{n+1}$ を $n+1$枚目の平面とする。

$H_{n+1}$ と各 $H_i$（$i = 1, 2, \cdots, n$）は平行であるか交わりが直線であるから，

$H_{n+1}$ には他の平面と交わってできる直線が最大 $n$ 本引かれ，$H_{n+1}$ は最大 $a_n$ 個の領域に分割される。

この領域１つにつき空間の領域も１つ増えるから

$$x_{n+1} \leqq x_n + a_n \quad \cdots①$$

①の等号は，$H_1, \cdots, H_{n+1}$ のどの 3 枚の平面についても法線ベクトルが 1 次独立であり，かつどの 4 枚の平面についても 1 点で交わることがないときに成立する。

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

$$= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \frac{1}{2} k(k+1) + 1 \right\}$$

$$= 2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) + (n-1)$$

$$= 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1) \right\} + (n-1)$$

$$= 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} (n-1)n(n+1) + (n-1)$$

$$= \frac{1}{6}\left(n^3 + 5n + 6\right)$$

これは $n = 1$ でも成り立つ。

したがって，求めるものは $\frac{1}{6}\left(n^3 + 5n + 6\right)$

(2)・$n=2$のとき

平行な 2 枚の平面により空間は 3 つの領域に分けられる。$x_2=4$より求める値は 3 である。

・$n=3$のとき

$x_3=8$と問題文の例から，求める値は 7 である。

・$n \geqq 4$のとき

平面$H_n$を「$H_1, \cdots, H_n$のどの 3 枚についても，それらの法線ベクトルが 1 次独立」

「$H_1, H_2, H_3, H_n$は 1 点で交わるが，他の 4 枚の平面は 1 点で交わらない」

をともに満たすようにとると，$H_n$により空間の領域は$b_{n-1}$個増える。

よって，求めるものは

$$x_{n-1}+b_{n-1}=x_{n-1}+a_{n-1}-1=x_n-1=\frac{1}{6}\left(n^3+5n\right) \quad (n \geqq 2)$$

(3) ・$n=3$のとき

$x_3=8$と問題文の例から，求める値は6 である。

・$n=4$のとき

$x_4=15$ と(2)より，求める値は 13 以下である。実際 12 であることを示す。

$H_1 // H_2$とすると，$H_2, H_3, H_4$により空間は最大$x_3=8$個の領域に分かれ，

$H_1$と$H_3, H_4$の交わりにより$H_1$は最大$a_2=4$個の部分に分かれるから，

空間は最大$8+4=12$個に分かれる。

具体的には 4 枚の平面を $x=0,\ y=0,\ z=0,\ z=1$ とすると実現する。

また，どの 2 平面も平行でなく，ある 3 平面が空間を$x_3$個の領域に分けているとする。

それを$H_1, H_2, H_3$とすると，$H_4$と他の 3 平面の交わりの 3 直線すべてが平行になることはない

ので，この 3 直線で$H_4$は少なくとも$b_3$個の領域に分かれる。

この場合，空間は少なくとも$8+6=14$個に分かれる。

これら以外の場合は，4 平面の法線ベクトルは 1 つの平面に平行であるので，その面上で

$a_4=11$個の領域に分かれることから，空間は 11 個の領域に分かれる。

・$n \geqq 5$のとき

(1)(2)より，$x_n - 2$ 個の分割が実現されれば，それが求めるものである。

$n-1 \geqq 4$ であるから，(2)より $H_1, \cdots, H_{n-1}$ が空間を $x_{n-1}-1$ 個の領域に分けるように，これらの平面を定めることができる。このとき，

・$H_1, H_2, H_n$ の法線ベクトルは平行でない，かつ 1 次独立でない。

他の 3 平面の法線ベクトルは 1 次独立である。

・$H_1, \cdots, H_{n-1}$ の 3 枚（以上）の平面の交点を通らない。

をともに満たすようにとると，$H_n$ と他の平面の交わりは，$H_1, H_2$ との交わりが平行な 2 直線になるから，空間の領域は $b_{n-1}$ 個増える。

よって，空間は $x_{n-1}-1+b_{n-1} = x_{n-1}-1+a_{n-1} = x_n - 2$ 個に分割される。

したがって，求めるものは

$n=3$，$n \geqq 5$のとき $\dfrac{1}{6}(n^3+5n-6)$

$n=4$のとき $12$

[ 東京工業大学 2019 年前期 $\boxed{5}$ ]

$a=\dfrac{2^8}{3^4}$ として，数列

$$b_k=\frac{(k+1)^{k+1}}{a^k k!} \qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を考える。

(1) 関数 $f(x)=(x+1)\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ は $x>0$ で減少することを示せ。

(2) 数列 $\{b_k\}$ の項の最大値 $M$ を既約分数で表し，$b_k=M$ となる $k$ をすべて求めよ。

---

(1) $f(x)=(x+1)\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ に対し，

$$f'(x)=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)+(x+1)\frac{-\dfrac{1}{x^2}}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$$

$$=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}$$

となる。

$\dfrac{1}{x}=t$ として $g(t)=\log(1+t)-t$ とおく。

$g(0)=0$ であり，$t>0$ で $g'(t)=\dfrac{1}{1+t}-1<0$ となるから

$g(t)<0$ ($t>0$)

よってこのとき，$f'(x)<0$ となることから，$f(x)$ は $x>0$ で減少する。

（証明終）

（2）$k \geqq 2$ に対し，

$$\frac{b_k}{b_{k-1}} = \frac{\dfrac{(k+1)^{k+1}}{a^k k!}}{\dfrac{k^k}{a^{k-1}(k-1)!}} = \frac{(k+1)^{k+1}}{a^k k!} \cdot \frac{a^{k-1}(k-1)!}{k^k} = \frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1} \quad \cdots ①$$

(1)より $\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$ は減少するから①も減少する。

ここで，$k=3$のとき

$$① = \frac{3^4}{2^8} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{3^4}{2^8} \cdot \frac{2^8}{3^4} = 1$$

であるから，$\dfrac{b_2}{b_1} > 1,\ \dfrac{b_3}{b_2} > 1,\ \dfrac{b_k}{b_{k-1}} < 1$（$k=4,\ 5,\ \cdots\cdots$）

すなわち　$b_1 < b_2 = b_3 > b_4 > b_5 > \cdots$　が成り立つ。

よって，$\{b_k\}$の項の最大値$M$ は

$$M = b_2 = \frac{3^3}{a^2 \cdot 2!} = \left(\frac{3^4}{2^8}\right)^2 \cdot \frac{3^3}{2} = \frac{3^{11}}{2^{17}}$$

であり，

$b_k = M$ となる$k$ は　$k=2,\ 3$