[東京工業大学 2019 年前期 $\boxed{1}$]

(1) $h>0$ とする。座標平面上の点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，点 $\mathrm{P}(h,\ s)$，点 $\mathrm{Q}(h,\ t)$ に対して三角形 OPQ の面積を S とする。ただし，$s<t$ とする。

三角形 OPQ の辺 $\mathrm{OP},\ \mathrm{OQ},\ \mathrm{PQ}$ の長さをそれぞれ $p,\ q,\ r$ とするとき，不等式

$$p^2+q^2+r^2 \geqq 4\sqrt{3}S$$

が成り立つことを示せ。また，等号が成立するときの $s,\ t$ の値を求めよ。

(2) 四面体 ABCD の表面積を T，辺 $\mathrm{BC},\ \mathrm{CA},\ \mathrm{AB}$ の長さをそれぞれ $a,\ b,\ c$ とし，辺 $\mathrm{AD},\ \mathrm{BD},\ \mathrm{CD}$ の長さをそれぞれ $\ell,\ m,\ n$ とする。このとき，不等式

$$a^2+b^2+c^2+\ell^2+m^2+n^2 \geqq 2\sqrt{3}T$$

が成り立つことを示せ。また，等号が成立するのは四面体 ABCD がどのような四面体のときか答えよ。

[東京工業大学 2019 年前期 $\boxed{2}$]

次の等式が $1 \leqq x \leqq 2$ で成り立つような関数 $f(x)$ と定数 $A,\ B$ を求めよ。

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} |\log y|\, f(xy)\, dy = 3x(\log x - 1) + A + \frac{B}{x}$$

ただし，$f(x)$ は $1 \leqq x \leqq 2$ に対して定義される連続関数とする。

[東京工業大学 2019 年前期 $\boxed{3}$]

i を虚数単位とする。実部と虚部が共に整数であるような複素数 z により $\dfrac{z}{3+2i}$ と表される複素数全体の集合を M とする。

(1) 原点を中心とする半径 r の円上またはその内部に含まれる M の要素の個数を $N(r)$ とする。

このとき，集合 $\{r \mid 10 \leqq N(r) < 25\}$ を求めよ。

(2) 複素数平面の相異なる 2 点 $z,\ w$ を結ぶ線分を $L(z,\ w)$ で表すとき，6 つの線分

$$L(0, 1),\ L\left(1, 1+\frac{i}{2}\right),\ L\left(1+\frac{i}{2}, \frac{1+i}{2}\right),\ L\left(\frac{1+i}{2}, \frac{1}{2}+i\right),\ L\left(\frac{1}{2}+i, i\right),\ L(i, 0)$$ で囲まれる

領域の内部または境界に含まれる M の要素の個数を求めよ。

[東京工業大学 2019 年前期 $\boxed{4}$]

☆ ☆

$H_1, \cdots, H_n$ を空間内の相異な n 枚の平面とする。

$H_1, \cdots, H_n$ によって，空間が $T(H_1, \cdots, H_n)$ 個の空間領域に分割されるとする。

例えば，空間の座標を (x, y, z) とするとき，

●平面 $x=0$ を H_1，平面 $y=0$ を H_2，平面 $z=0$ を H_3 とすると $T(H_1, H_2, H_3)=8$，

●平面 $x=0$ を H_1，平面 $y=0$ を H_2，平面 $x+y=1$ を H_3 とすると $T(H_1, H_2, H_3)=7$，

●平面 $x=0$ を H_1，平面 $x=1$ を H_2，平面 $y=0$ を H_3 とすると $T(H_1, H_2, H_3)=6$，

●平面 $x=0$ を H_1，平面 $y=0$ を H_2，平面 $z=0$ を H_3，平面 $x+y+z=1$ を H_4 とすると

$T(H_1, H_2, H_3, H_4)=15$，

である。

(1) 各 n に対して $T(H_1, \cdots, H_n)$ のとりえる値のうち最も大きいものを求めよ。

(2) 各 n に対して $T(H_1, \cdots, H_n)$ のとりうる値のうち 2 番目に大きいものを求めよ。

ただし $n \geqq 2$ とする。

(3) 各 n に対して $T(H_1, \cdots, H_n)$ のとりうる値のうち 3 番目に大きいものを求めよ。

ただし $n \geqq 3$ とする。

☆ ☆

[東京工業大学 2019 年前期 $\boxed{5}$]

$a=\dfrac{2^8}{3^4}$ として，数列

$$b_k=\frac{(k+1)^{k+1}}{a^k k!} \qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を考える。

(1) 関数 $f(x)=(x+1)\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ は $x>0$ で減少することを示せ。

(2) 数列 $\{b_k\}$ の項の最大値 M を既約分数で表し，$b_k=M$ となる k をすべて求めよ。