



(1)  $h > 0$  とする。座標平面上の点  $O(0, 0)$ ，点  $P(h, s)$ ，点  $Q(h, t)$  に対して三角形  $OPQ$  の面積を  $S$  とする。ただし， $s < t$  とする。

三角形  $OPQ$  の辺  $OP$ ， $OQ$ ， $PQ$  の長さをそれぞれ  $p$ ， $q$ ， $r$  とするとき，不等式

$$p^2 + q^2 + r^2 \geq 4\sqrt{3}S$$

が成り立つことを示せ。また，等号が成立するときの  $s$ ， $t$  の値を求めよ。

(2) 四面体  $ABCD$  の表面積を  $T$ ，辺  $BC$ ， $CA$ ， $AB$  の長さをそれぞれ  $a$ ， $b$ ， $c$  とし，辺  $AD$ ， $BD$ ， $CD$  の長さをそれぞれ  $l$ ， $m$ ， $n$  とする。このとき，不等式

$$a^2 + b^2 + c^2 + l^2 + m^2 + n^2 \geq 2\sqrt{3}T$$

が成り立つことを示せ。また，等号が成立するのは四面体  $ABCD$  がどのような四面体のときか答えよ。



[ 東京工業大学 2019 年前期 2 ]



次の等式が  $1 \leq x \leq 2$  で成り立つような関数  $f(x)$  と定数  $A, B$  を求めよ。

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} |\log y| f(xy) dy = 3x(\log x - 1) + A + \frac{B}{x}$$

ただし,  $f(x)$  は  $1 \leq x \leq 2$  に対して定義される連続関数とする。





$i$  を虚数単位とする。実部と虚部が共に整数であるような複素数  $z$  により  $\frac{z}{3+2i}$  と表される複素数

全体の集合を  $M$  とする。

(1) 原点を中心とする半径  $r$  の円上またはその内部に含まれる  $M$  の要素の個数を  $N(r)$  とする。

このとき、集合  $\{r \mid 10 \leq N(r) < 25\}$  を求めよ。

(2) 複素数平面の相異なる 2 点  $z, w$  を結ぶ線分を  $L(z, w)$  で表すとき、6 つの線分

$L(0, 1)$ ,  $L\left(1, 1 + \frac{i}{2}\right)$ ,  $L\left(1 + \frac{i}{2}, \frac{1+i}{2}\right)$ ,  $L\left(\frac{1+i}{2}, \frac{1}{2} + i\right)$ ,  $L\left(\frac{1}{2} + i, i\right)$ ,  $L(i, 0)$  で囲まれる

領域の内部または境界に含まれる  $M$  の要素の個数を求めよ。





$H_1, \dots, H_n$  を空間内の相異なる  $n$  枚の平面とする。

$H_1, \dots, H_n$  によって、空間が  $T(H_1, \dots, H_n)$  個の空間領域に分割されるとする。

例えば、空間の座標を  $(x, y, z)$  とするとき、

- 平面  $x=0$  を  $H_1$ 、平面  $y=0$  を  $H_2$ 、平面  $z=0$  を  $H_3$  とすると  $T(H_1, H_2, H_3)=8$ ,
- 平面  $x=0$  を  $H_1$ 、平面  $y=0$  を  $H_2$ 、平面  $x+y=1$  を  $H_3$  とすると  $T(H_1, H_2, H_3)=7$ ,
- 平面  $x=0$  を  $H_1$ 、平面  $x=1$  を  $H_2$ 、平面  $y=0$  を  $H_3$  とすると  $T(H_1, H_2, H_3)=6$ ,
- 平面  $x=0$  を  $H_1$ 、平面  $y=0$  を  $H_2$ 、平面  $z=0$  を  $H_3$ 、平面  $x+y+z=1$  を  $H_4$  とすると

$$T(H_1, H_2, H_3, H_4)=15,$$

である。

- (1) 各  $n$  に対して  $T(H_1, \dots, H_n)$  のとりえる値のうち最も大きいものを求めよ。
- (2) 各  $n$  に対して  $T(H_1, \dots, H_n)$  のとりうる値のうち 2 番目に大きいものを求めよ。  
ただし  $n \geq 2$  とする。
- (3) 各  $n$  に対して  $T(H_1, \dots, H_n)$  のとりうる値のうち 3 番目に大きいものを求めよ。  
ただし  $n \geq 3$  とする。





$a = \frac{2^8}{3^4}$  として, 数列

$$b_k = \frac{(k+1)^{k+1}}{a^k k!} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

を考える。

(1) 関数  $f(x) = (x+1) \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$  は  $x > 0$  で減少することを示せ。

(2) 数列  $\{b_k\}$  の項の最大値  $M$  を既約分数で表し,  $b_k = M$  となる  $k$  をすべて求めよ。

