[東京工業大学 2019 年前期 $\boxed{5}$]

☆ ―――――――――――――――――――――――――――――――――――― ☆

$a=\dfrac{2^8}{3^4}$ として，数列

$$b_k=\frac{(k+1)^{k+1}}{a^k k!}\qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を考える。

(1) 関数 $f(x)=(x+1)\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ は $x>0$ で減少することを示せ。

(2) 数列 $\{b_k\}$ の項の最大値 M を既約分数で表し，$b_k=M$ となる k をすべて求めよ。

☆ ―――――――――――――――――――――――――――――――――――― ☆

(1) $f(x)=(x+1)\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ に対し，

$$f'(x)=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)+(x+1)\frac{-\dfrac{1}{x^2}}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$$

$$=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}$$

となる。

$\dfrac{1}{x}=t$ として $g(t)=\log(1+t)-t$ とおく。

$g(0)=0$ であり，$t>0$ で $g'(t)=\dfrac{1}{1+t}-1<0$ となるから

$g(t)<0$ （$t>0$）

よってこのとき，$f'(x)<0$ となることから，$f(x)$ は $x>0$ で減少する。

（証明終）

（2） $k \geqq 2$ に対し，

$$\frac{b_k}{b_{k-1}} = \frac{\dfrac{(k+1)^{k+1}}{a^k k!}}{\dfrac{k^k}{a^{k-1}(k-1)!}} = \frac{(k+1)^{k+1}}{a^k k!} \cdot \frac{a^{k-1}(k-1)!}{k^k} = \frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1} \quad \cdots ①$$

(1)より $\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$ は減少するから①も減少する。

ここで，$k=3$ のとき

$$① = \frac{3^4}{2^8} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{3^4}{2^8} \cdot \frac{2^8}{3^4} = 1$$

であるから，$\dfrac{b_2}{b_1} > 1,\ \dfrac{b_3}{b_2} > 1,\ \dfrac{b_k}{b_{k-1}} < 1$ （$k = 4, 5, \cdots\cdots$）

すなわち　$b_1 < b_2 = b_3 > b_4 > b_5 > \cdots$　が成り立つ。

よって，$\{b_k\}$ の項の最大値 M は

$$M = b_2 = \frac{3^3}{a^2 \cdot 2!} = \left(\frac{3^4}{2^8}\right)^2 \cdot \frac{3^3}{2} = \frac{3^{11}}{2^{17}}$$

であり，

$b_k = M$ となる k は　$k = 2, 3$