[東京工業大学 2019 年前期 $\boxed{4}$]

$H_1, \cdots, H_n$ を空間内の相異なる n 枚の平面とする。

$H_1, \cdots, H_n$ によって，空間が $T(H_1, \cdots, H_n)$ 個の空間領域に分割されるとする。

例えば，空間の座標を (x, y, z) とするとき，

●平面 $x=0$ を H_1，平面 $y=0$ を H_2，平面 $z=0$ を H_3 とすると $T(H_1, H_2, H_3)=8$，

●平面 $x=0$ を H_1，平面 $y=0$ を H_2，平面 $x+y=1$ を H_3 とすると $T(H_1, H_2, H_3)=7$，

●平面 $x=0$ を H_1，平面 $x=1$ を H_2，平面 $y=0$ を H_3 とすると $T(H_1, H_2, H_3)=6$，

●平面 $x=0$ を H_1，平面 $y=0$ を H_2，平面 $z=0$ を H_3，平面 $x+y+z=1$ を H_4 とすると

$T(H_1, H_2, H_3, H_4)=15$，

である。

(1) 各 n に対して $T(H_1, \cdots, H_n)$ のとりえる値のうち最も大きいものを求めよ。

(2) 各 n に対して $T(H_1, \cdots, H_n)$ のとりうる値のうち 2 番目に大きいものを求めよ。

ただし $n \geqq 2$ とする。

(3) 各 n に対して $T(H_1, \cdots, H_n)$ のとりうる値のうち 3 番目に大きいものを求めよ。

ただし $n \geqq 3$ とする。

平面に n 本の直線を引くとき，平面が S 個の領域に分割されるものとする。

S のうち，最も大きいものを a_n，2 番目に大きいものを b_n とすると $a_1=2$ であり，b_1 はない。

「どの 2 本も平行でなく，どの 3 本も 1 点で交わらない」…（＊）

ように n 本の直線があるとき，$n+1$ 本目の直線を（＊）を満たすように引くと，その直線は既にある n 本の直線と n 個の点で交わり，$n+1$ 個の線分または半直線に分けられる。それらによって，平面領域が 1 つずつ増えるので，

$$a_{n+1}=a_n+n+1$$

が成り立つ。$a_1=2$ より $n \geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)=2+\sum_{k=2}^{n}k=2+\sum_{k=1}^{n}k-1=1+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}n(n+1)+1$$

これは $n=1$ のときも成り立つ。

次に，b_n について考える。n 本の直線により平面が a_n 個の領域に分割されているとする。

このとき，$n+1$本目の直線を

・既にある直線のいずれかと平行

・既にある交点のうち１つだけを通る

のいずれかを満たすように引くと，$n+1$本目の直線と元々ある n 本の直線との交点は n 個増える。

よって，$b_n = a_n - 1$（$n \geqq 2$）が実現する。

(1) 求める値を x_n とする。$x_1 = 2$ である。

空間に n 枚の平面 $H_1, \cdots, H_n$ があり，H_{n+1} を $n+1$枚目の平面とする。

H_{n+1} と各 H_i（$i = 1, 2, \cdots, n$）は平行であるか交わりが直線であるから，

H_{n+1} には他の平面と交わってできる直線が最大 n 本引かれ，H_{n+1} は最大 a_n 個の領域に分割される。

この領域１つにつき空間の領域も１つ増えるから

$$x_{n+1} \leqq x_n + a_n \quad \cdots①$$

①の等号は，$H_1, \cdots, H_{n+1}$ のどの 3 枚の平面についても法線ベクトルが 1 次独立であり，かつどの 4 枚の平面についても１点で交わることがないときに成立する。

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

$$= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \frac{1}{2} k(k+1) + 1 \right\}$$

$$= 2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) + (n-1)$$

$$= 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1) \right\} + (n-1)$$

$$= 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} (n-1)n(n+1) + (n-1)$$

$$= \frac{1}{6} \left(n^3 + 5n + 6 \right)$$

これは $n = 1$ でも成り立つ。

したがって，求めるものは $\frac{1}{6} \left(n^3 + 5n + 6 \right)$

(2)・$n=2$のとき

平行な 2 枚の平面により空間は 3 つの領域に分けられる。$x_2=4$より求める値は 3 である。

・$n=3$のとき

$x_3=8$と問題文の例から，求める値は 7 である。

・$n \geqq 4$のとき

平面H_nを「$H_1, \cdots, H_n$のどの 3 枚についても，それらの法線ベクトルが 1 次独立」

「H_1, H_2, H_3, H_nは 1 点で交わるが，他の 4 枚の平面は 1 点で交わらない」

をともに満たすようにとると，H_nにより空間の領域はb_{n-1}個増える。

よって，求めるものは

$$x_{n-1}+b_{n-1}=x_{n-1}+a_{n-1}-1=x_n-1=\frac{1}{6}\left(n^3+5n\right) \quad (n \geqq 2)$$

(3) ・$n=3$のとき

$x_3=8$と問題文の例から，求める値は6 である。

・$n=4$のとき

$x_4=15$ と(2)より，求める値は 13 以下である。実際 12 であることを示す。

$H_1 // H_2$とすると，H_2, H_3, H_4により空間は最大$x_3=8$個の領域に分かれ，

H_1とH_3, H_4の交わりによりH_1は最大$a_2=4$個の部分に分かれるから，

空間は最大$8+4=12$個に分かれる。

具体的には 4 枚の平面を $x=0,\ y=0,\ z=0,\ z=1$ とすると実現する。

また，どの 2 平面も平行でなく，ある 3 平面が空間をx_3個の領域に分けているとする。

それをH_1, H_2, H_3とすると，H_4と他の 3 平面の交わりの 3 直線すべてが平行になることはないので，この 3 直線でH_4は少なくともb_3個の領域に分かれる。

この場合，空間は少なくとも$8+6=14$個に分かれる。

これら以外の場合は，4 平面の法線ベクトルは 1 つの平面に平行であるので，その面上で

$a_4=11$個の領域に分かれることから，空間は 11 個の領域に分かれる。

・$n \geqq 5$のとき

(1)(2)より，$x_n - 2$個の分割が実現されれば，それが求めるものである。

$n-1 \geqq 4$であるから，(2)より$H_1, \cdots, H_{n-1}$が空間を$x_{n-1}-1$個の領域に分けるように，これらの平面を定めることができる。このとき，

・H_1, H_2, H_nの法線ベクトルは平行でない，かつ1次独立でない。

他の3平面の法線ベクトルは1次独立である。

・$H_1, \cdots, H_{n-1}$の3枚（以上）の平面の交点を通らない。

をともに満たすようにとると，H_nと他の平面の交わりは，H_1, H_2との交わりが平行な2直線になるから，空間の領域はb_{n-1}個増える。

よって，空間は $x_{n-1}-1+b_{n-1}=x_{n-1}-1+a_{n-1}=x_n-2$ 個に分割される。

したがって，求めるものは

$n=3$，$n \geqq 5$のとき $\dfrac{1}{6}(n^3+5n-6)$

$n=4$のとき 12