［ 東京工業大学 2019 年前期 $\boxed{3}$ ］

i を虚数単位とする。実部と虚部が共に整数であるような複素数 z により $\dfrac{z}{3+2i}$ と表される複素数全体の集合を M とする。

（1）原点を中心とする半径 r の円上またはその内部に含まれる M の要素の個数を $N(r)$ とする。

このとき，集合 $\{r \mid 10 \leqq N(r) < 25\}$ を求めよ。

（2）複素数平面の相異なる 2 点 $z,\ w$ を結ぶ線分を $L(z,\ w)$ で表すとき，6 つの線分

$$L(0, 1)\ ,\ \ L\left(1, 1+\frac{i}{2}\right),\ \ L\left(1+\frac{i}{2},\ \frac{1+i}{2}\right),\ \ L\left(\frac{1+i}{2},\ \frac{1}{2}+i\right),\ \ L\left(\frac{1}{2}+i,\ i\right),\ \ L(i,\ 0)$$ で囲まれる

領域の内部または境界に含まれる M の要素の個数を求めよ。

（1） $w=\dfrac{z}{3+2i}$ とおく。

実部と虚部が共に整数であるような複素数全体の集合を N とすると

$z \in N$ のとき　$w=\dfrac{z}{3+2i} \in M$

$w \in M$ のとき　$z=w(3+2i) \in N$

となるので，$M,\ N$ の要素は 1 対 1 に対応する。

$$|w|=\left|\frac{z}{3+2i}\right|=\frac{|z\ \ |}{|3+2i|}=\frac{z|}{\sqrt{13}}$$ より

$$|w| \leqq r \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|z|}{\sqrt{13}} \leqq r$$

$$\Leftrightarrow \quad |z| \leqq \sqrt{13}\,r$$

となるから，$N(r)$ は絶対値が $\sqrt{13}\,r$ 以下の N の要素の個数に等しい。

$z=x+yi$ のとき，$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ であり，

$x,\ y$ が整数のとき，x^2+y^2 は 0 以上の整数になる。

図のように原点を中心とする円を考え，

半径を少しずつ広げていくと，

$|z|=0 \quad \Leftrightarrow \quad z=0$（1 個）

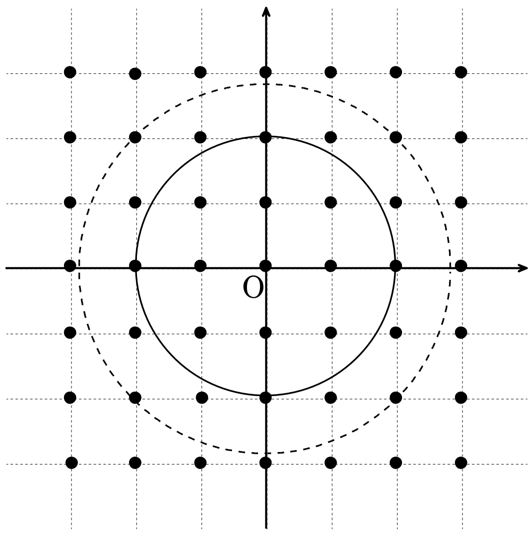
$|z|=\sqrt{1}=1 \quad \Leftrightarrow \quad z=\pm 1,\ \pm i$ （4 個）

$|z|=\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad z=\pm 1\pm i$（複号任意，4 個）

$|z|=\sqrt{3}$　となる z はない

$|z|=\sqrt{4}=2 \quad \Leftrightarrow \quad z=\pm 2,\ \pm 2i$（4 個）

$|z|=\sqrt{5} \quad \Leftrightarrow \quad z=\pm 1\pm 2i,\ \pm 2\pm i$（複号任意，8 個）



$|z|=\sqrt{6}$　となる z はない

$|z|=\sqrt{7}$　となる z はない

$|z|=\sqrt{8}=2\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad z=\pm 2\pm 2i$（4 個）

よって

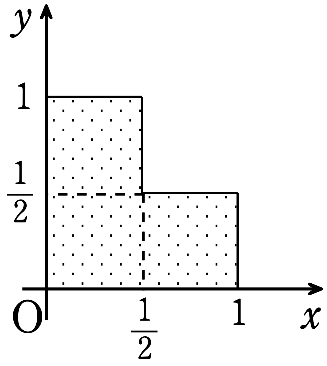
$\sqrt{13}r<2$　のときは，$N(r)\leqq 1+4+4=9$

$2\leqq \sqrt{13}r<2\sqrt{2}$　のときは，$1+4+4+4\leqq N(r)<1+4+4+4+8 \quad \Leftrightarrow \quad 13\leqq N(r)\leqq 21$

$\sqrt{13}r\geqq 2\sqrt{2}$　のときは，$N(r)\geqq 1+4+4+4+8+4=25$

となるので，集合$\{r\,|\,10\leqq N(r)<25\}$は　$\dfrac{2}{\sqrt{13}}\leqq r<\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$

（2）題意の領域Wは右図の打点部分である。



この領域にwがあるとき，

$z=(3+2i)w$が存在する領域は

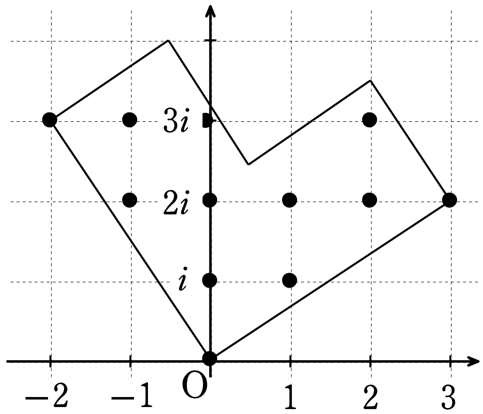
$$1\times(3+2i)=3+2i$$

$$\left(1+\frac{i}{2}\right)\times(3+2i)=2+\frac{7}{2}i$$

$$\frac{1+i}{2}\times(3+2i)=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i$$

$$\left(\frac{1}{2}+i\right)\times(3+2i)=-\frac{1}{2}+4i$$

$$i\times(3+2i)=-2+3i$$



であることから，Wを複素数平面上で $3+2i$ 倍することにより

拡大および回転してできる右図の直線で囲まれる領域である。

求める集合の個数は，この領域（直線上も含む）にある実部

および虚部が整数である複素数の個数である。

したがって，図より12個