[東京工業大学 2019 年前期 $\boxed{2}$]

次の等式が $1 \leqq x \leqq 2$ で成り立つような関数 $f(x)$ と定数 $A,\ B$ を求めよ。

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} |\log y|\, f(xy)\, dy = 3x(\log x - 1) + A + \frac{B}{x}$$

ただし，$f(x)$ は $1 \leqq x \leqq 2$ に対して定義される連続関数とする。

$xy = t$ とおくと，

$xdy = dt$

$y : \dfrac{1}{x} \to \dfrac{2}{x}$ のとき　$t : 1 \to 2$ であり

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} |\log y|\, f(xy)\, dy = \int_1^2 \left|\log\frac{t}{x}\right| f(t) \cdot \frac{1}{x}\, dt = \frac{1}{x}\int_1^2 |\log t - \log x|\, f(t)\, dt$$

となるから，与えられた等式は

$$\frac{1}{x}\int_1^2 |\log t - \log x|\, f(t)\, dt = 3x(\log x - 1) + A + \frac{B}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_1^2 |\log t - \log x|\, f(t)\, dt = 3x^2(\log x - 1) + Ax + B \quad \cdots①$$

となる。$1 \leqq x \leqq 2$ であるからこれは

$$\int_1^x \left(\log x - \log t\right) f(t)\, dt + \int_x^2 \left(\log t - \log x\right) f(t)\, dt = 3x^2(\log x - 1) + Ax + B$$

$$\Leftrightarrow \quad \log x\int_1^x f(t)\, dt - \int_1^x \left(\log t\right) f(t)\, dt - \int_2^x \left(\log t\right) f(t)\, dt + \log x\int_2^x f(t)\, dt = 3x^2(\log x - 1) + Ax + B$$

$\cdots①$

となる。この式の両辺を x で微分して

$$\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\, dt + \left(\log x\right) f(x) - \left(\log x\right) f(x) - \left(\log x\right) f(x) + \frac{1}{x}\int_2^x f(t)\, dt + \left(\log x\right) f(x)$$

$$= 6x(\log x - 1) + 3x + A$$

整理すると

$$\int_1^x f(t)\, dt + \int_2^x f(t)\, dt = 6x^2 \cdot \log x - 3x^2 + Ax \quad \cdots②$$

さらに，この式の両辺を x で微分して

$$f(x)+f(x)=12x\log x+6x^2\cdot\frac{1}{x}-6x+A$$

よって　$f(x)=6x\log x+\dfrac{A}{2}$

ここで，②で $x=1$，$x=2$ とすると

$$\int_2^1 f(t)\,dt=-3+A \quad \cdots③$$

$$\int_1^2 f(t)\,dt=24\log 2-12+2A \quad \cdots④$$

③，④を辺々加えて

$$0=24\log 2-15+3A$$

したがって

$$A=5-8\log 2$$

であるから

$$f(x)=6x\log x+\frac{5}{2}-4\log 2$$

を得る。また，①で $x=1$，$x=2$ とすると

$$-\int_2^1(\log t)\,f(t)\,dt=-3+A+B \quad \cdots⑤$$

$$\log 2\int_1^2 f(t)\,dt-\int_1^2(\log t)\,f(t)\,dt=12(\log 2-1)+2A+B \quad \cdots⑥$$

⑤，⑥を辺々加えて

$$\log 2\int_1^2 f(t)\,dt=12\log 2-15+3A+2B$$

$\displaystyle\int_1^2 f(t)\,dt=3-A$ であるから

$$\log 2(3-A)=12\log 2-15+3A+2B$$

$$\log 2\{3-(5-8\log 2)\}=12\log 2-15+3(5-8\log 2)+2B$$

よって　$B=4(\log 2)^2+5\log 2$

以上より，$f(x)=6x\log x+\dfrac{5}{2}-4\log 2$

$$A=5-8\log 2,\quad B=4(\log 2)^2+5\log 2$$