［ 東京工業大学 2019 年前期 $\boxed{1}$ ］

(1) $h>0$ とする。座標平面上の点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，点 $\mathrm{P}(h,\ s)$，点 $\mathrm{Q}(h,\ t)$ に対して三角形 OPQ の面積を S とする。ただし，$s<t$ とする。

三角形 OPQ の辺 $\mathrm{OP},\ \mathrm{OQ},\ \mathrm{PQ}$ の長さをそれぞれ $p,\ q,\ r$ とするとき，不等式

$$p^2+q^2+r^2 \geqq 4\sqrt{3}S$$

が成り立つことを示せ。また，等号が成立するときの $s,\ t$ の値を求めよ。

(2) 四面体 ABCD の表面積を T，辺 $\mathrm{BC},\ \mathrm{CA},\ \mathrm{AB}$ の長さをそれぞれ $a,\ b,\ c$ とし，辺 $\mathrm{AD},\ \mathrm{BD},\ \mathrm{CD}$ の長さをそれぞれ $\ell,\ m,\ n$ とする。このとき，不等式

$$a^2+b^2+c^2+\ell^2+m^2+n^2 \geqq 2\sqrt{3}T$$

が成り立つことを示せ。また，等号が成立するのは四面体 ABCD がどのような四面体のときか答えよ。

---

(1) $$\begin{aligned}p^2+q^2+r^2-4\sqrt{3}S &= (h^2+s^2)+(h^2+t^2)+(t-s)^2-4\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}(t-s)h\\ &=2h^2-2\sqrt{3}(t-s)h+s^2+t^2+(t-s)^2\\ &=2\left\{h-\frac{\sqrt{3}}{2}(t-s)\right\}^2-\frac{3}{2}(t-s)^2+s^2+t^2+(t-s)^2\\ &=2\left\{h^2-\sqrt{3}(t-s)h\right\}+s^2+t^2+(t-s)^2\\ &=2\left\{h-\frac{\sqrt{3}}{2}(t-s)\right\}^2+\frac{1}{2}s^2+st+\frac{1}{2}t^2\\ &=2\left\{h-\frac{\sqrt{3}}{2}(t-s)\right\}^2+\frac{1}{2}(s+t)^2 \geqq 0\end{aligned}$$

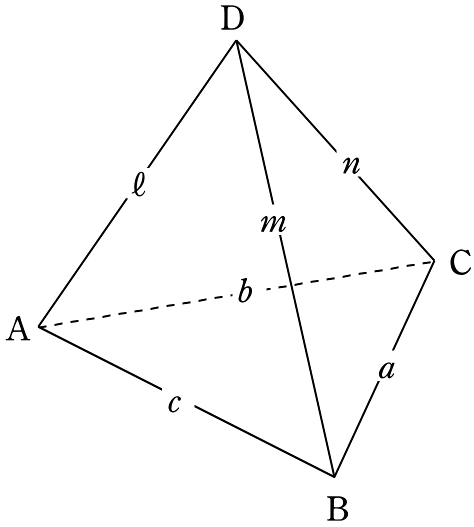
となる。

等号が成立するのは，$h-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(t-s)=0$ かつ $s+t=0$

すなわち $s=-\dfrac{h}{\sqrt{3}},\ t=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$ のとき。このとき，三角形 OPQ は正三角形である。

(2) 三角形ABC, ADC, ADB, BCDの面積を S_1, S_2, S_3, S_4 とすると

(1)の結果より



$$a^2+b^2+c^2\geqq4\sqrt{3}S_1$$

$$b^2+n^2+\ell^2\geqq4\sqrt{3}S_2$$

$$\ell^2+m^2+c^2\geqq4\sqrt{3}S_3$$

$$a^2+m^2+n^2\geqq4\sqrt{3}S_4$$

が成り立つ。

これらの辺々を加えて

$$2\left(a^2+b^2+c^2+\ell^2+m^2+n^2\right)\geqq4\sqrt{3}\left(S_1+S_2+S_3+S_4\right)=4\sqrt{3}T$$

を得る。等号が成立するのは，三角形ABC, ADC, ADB, BCDがすべて正三角形のときであり，

このとき四面体ABCDは正四面体になる。