[東京工業大学 2018 年前期 $\boxed{1}$]

$a,\ b,\ c$ を実数とし，３つの２次方程式

$$x^2+ax+1=0 \cdots\cdots ①,\quad x^2+bx+2=0 \cdots\cdots ②,\quad x^2+cx+3=0 \cdots\cdots ③$$

の解を複素数平面上で考察する。

(1) ２つの方程式①, ②がいずれも実数解を持たないとき, それらの解はすべて同一円周上にあるか, またはすべて同一直線上にあることを示せ。また，それらの解がすべて同一円周上にあるとき，その円の中心と半径を $a,\ b$ を用いて表せ。

(2) ３つの方程式①，②，③がいずれも実数解を持たず，かつそれらの解がすべて同一円周上にあるための必要十分条件を $a,\ b,\ c$ を用いて表せ。

$x^2+ax+1=0\ \ \cdots①,\ \ x^2+bx+2=0\ \ \cdots②,\ \ x^2+cx+3=0\ \ \cdots③$ とする。

(1) ①を解くと　$x=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$，②を解くと　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-8}}{2}$

実数係数の２次方程式が実数解をもたないとき，２つの解は共役な複素数になる。

共役な複素数は複素数平面上では，実軸に関して対称な２点になる。

①の解と②の解の実部が等しいとき，それら４解が表す複素数は，複素数平面上で同一直線上にある。

①の解と②の解の実部が異なる，すなわち $-\dfrac{a}{2}\neq-\dfrac{b}{2}\quad\Leftrightarrow\quad a\neq b$ のときは,

４解が表す複素数は，複素数平面上で等脚台形の４頂点となる。

よって，題意を満たす。

また，①の解を $\alpha,\ \overline{\alpha}$ とおくと，解と係数の関係より $\alpha+\overline{\alpha}=-a$，$\alpha\overline{\alpha}=1$ であり,

実数 t に対し，t と α の距離の２乗は

$$|t-\alpha|^2=(t-\alpha)(\overline{t}-\overline{\alpha})=t^2-(\alpha+\overline{\alpha})t+\alpha\overline{\alpha}=t^2+at+1$$

となる。

②のついても同様に考え，①と②の４解が t を中心とする円の上にあるとき

$t^2+at+1=t^2+bt+2$　より　$t=\dfrac{1}{a-b}$

このときの半径は

$$\sqrt{t^2+at+1}=\sqrt{\frac{1+a(a-b)+(a-b)^2}{(a-b)^2}}=\frac{\sqrt{2a^2+b^2-3ab+1}}{|a-b|}$$

(2) ①，②，③がいずれも実数解をもたないとき，判別式より

$a^2-4<0 \quad \Leftrightarrow \quad -2<a<2$

$b^2-8<0 \quad \Leftrightarrow \quad -2\sqrt{2}<b<2\sqrt{2}$

$c^2-12<0 \quad \Leftrightarrow \quad -2\sqrt{3}<c<2\sqrt{3}$

である。また，②，③の解が実数uを中心とする円の上にあるとき

$u^2+bu+2=u^2+cu+3$ より $u=\dfrac{1}{b-c}$

(1)のtとuが等しいとき，６つの解が複素数平面上で同一円上にあるので

$t=u \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{a-b}=\dfrac{1}{b-c}$ より $a+c=2b$

よって，求める条件は

a, b, cは相異なる実数であり，$a+c=2b$ かつ

$-2<a<2$ かつ $-2\sqrt{2}<b<2\sqrt{2}$ かつ $-2\sqrt{3}<c<2\sqrt{3}$

[東京工業大学 2018 年前期 $\boxed{2}$]

次の問いに答えよ。

(1) $35x+91y+65z=3$ を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ を一組求めよ。

(2) $35x+91y+65z=3$ を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の中で x^2+y^2 の値が最小となるもの，

およびその最小値を求めよ。

---

(1) $35x+91y+65z=3 \iff 7(5x+13y)+65z=3$

$w=5x+13y$ とおくと $7w+65z=3$

これを満たす整数 $w,\ z$ として， $w=19$， $z=-2$ がある。

このとき $5x+13y=19$ であり，これを満たす整数 $x,\ y$ として $x=-4,\ y=3$ がある。

したがって，題意を満たす整数の組の 1 つとして $(x,\ y,\ z)=(-4,\ 3,\ -2)$ がある。

(2) $35x+91y+65z=3$ …①

$35\cdot(-4)+91\cdot3+65\cdot(-2)=3$ …②

①から②を引いて $35(x+4)+91(y-3)+65(z+2)=0$ …③

③ $\iff 35(x+4)=-91(y-3)-65(z+2)$

$=-13\{7(y-3)+5(z+2)\}$

であり，35 と 13 は互いに素であるから $x+4=13m$（m は整数）と表せる。

すなわち， $x=13m-4$

また，③ $\iff 91(y-3)=-35(x+4)-65(z+2)$

$=-5\{7(x+4)+13(z+2)\}$

であり，91 と 5 は互いに素であるから $y-3=5n$（n は整数）と表せる。

すなわち， $y=5n+3$

$x^2+y^2=(13m-4)^2+(5n+3)^2$ が最小となるのは

$x,\ y$ が整数であることに注意して $m=0,\ n=-1$ のときであり，

このとき $x=-4$， $y=-2$ であるが，

①より $35\cdot(-4)+91\cdot(-2)+65z=3 \iff 65z=325 \iff z=5$

となり， z も整数になる。

以上より，求める x^2+y^2 の値が最小となるのは $(x,\ y,\ z)=(-4,\ -2,\ 5)$ のときであり，

その値は $(-4)^2+(-2)^2=20$

[東京工業大学 2018 年前期 $\boxed{3}$]

☆────────────────────────☆

方程式 $e^x(1-\sin x)=1$ について，次の問いに答えよ。

(1) この方程式は負の実数解を持たないことを示せ。また正の実数解を無限子持つことを示せ。

(2) この方程式の正の実数解を小さい方から順に並べて $a_1, a_2, a_3, \cdots$ とし，$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ とおく。

このとき極限値 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}$ 求めよ。

☆────────────────────────☆

(1) $f(x)=e^x(1-\sin x)-1$ とおく。

$$f'(x)=e^x(1-\sin x)+e^x(-\cos x)$$
$$=e^x(1-\sin x-\cos x)$$
$$=e^x\left\{1-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

であり，$f'(x)=0$ となるのは $x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2n\pi$ すなわち $x=2n\pi$（n は整数）

または $x+\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\pi+2n\pi$ すなわち $x=\frac{\pi}{2}+2n\pi$（n は整数）

のときである。

ここで，$2n\pi<x<\frac{\pi}{2}+2n\pi$ のとき $f'(x)<0$，$\frac{\pi}{2}+2n\pi<x<2\pi+2n\pi$ のとき $f'(x)>0$

であるから，$f(x)$ は $x=2n\pi$ で極大値，$x=\frac{\pi}{2}+2n\pi$ で極小値をとる。

$f\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=-1$ であり，

n が負の整数のとき，各極大値について $f(2n\pi)=e^{2n\pi}-1<0$ であるから

$f(x)=0$ は，負の実数解をもたない。

n が正の整数のとき，各極大値 $f(2n\pi)=e^{2n\pi}-1>0$ であるから

$f(x)=0$ は，$2n\pi<x<\frac{\pi}{2}+2n\pi$ に 1 つ …①,

$\frac{\pi}{2}+2n\pi<x<2\pi+2n\pi$ に 1 つ …②

実数解をもつ。

よって，正の実数解を無限個もつ。

(2) ①，②の解 $x=a_n$ は交互に現れ， $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，

②より $\dfrac{\pi}{2}+2(k-1)\pi<a_{2k-1}<2\pi+2(k-1)\pi$，①より $2k\pi<a_{2k}<\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ の範囲にある。

これらをまとめて表すと

$$\frac{\pi}{2}\left\{2n-\frac{1+(-1)^{n-1}}{2}\right\}<a_n<\frac{\pi}{2}\left\{2(n+1)-\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

となる。

よって，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{2}\left\{2k-\frac{1+(-1)^{k-1}}{2}\right\}<S_n<\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{2}\left\{2(k+1)-\frac{1+(-1)^k}{2}\right\}$$

$$\frac{\pi}{2}\left\{n^2+n-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)}\right\}<S_n<\frac{\pi}{2}\left\{n^2+n+2n-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}\cdot\frac{-1-(-1)^n}{1-(-1)}\right\}$$

$$\frac{\pi}{2}\left\{n^2+\frac{1}{2}n-\frac{1-(-1)^n}{4}\right\}<S_n<\frac{\pi}{2}\left\{n^2+\frac{5}{2}n+\frac{1+(-1)^n}{4}\right\}$$

辺々を n^2 で割って

$$\frac{\pi}{2}\left\{1+\frac{1}{2n}-\frac{1-(-1)^n}{4n^2}\right\}<\frac{S_n}{n^2}<\frac{\pi}{2}\left\{1+\frac{5}{2n}+\frac{1+(-1)^n}{4n^2}\right\}$$

ここで，左辺と右辺は共に $\dfrac{\pi}{2}$ に収束するので，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=\frac{\pi}{2}$$

[東京工業大学 2018 年前期 $\boxed{4}$]

xyz 空間内において，連立不等式

$$\frac{x^2}{4}+y^2\leqq 1,\ |z|\leqq 6$$

により定まる領域を V とし，2 点 $(2,\ 0,\ 2),\ (-2,\ 0,\ -2)$ を通る直線を ℓ とする。

(1) $|t|\leqq 2\sqrt{2}$ を満たす実数 t に対し，点 $P_t\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ 0,\ \dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)$ を通り ℓ に垂直な平面を H_t とする。

また，実数 θ に対し，点 $(2\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ を通り z 軸に平行な直線を L_θ とする。

L_θ と H_t との交点の z 座標を t と θ を用いて表せ。

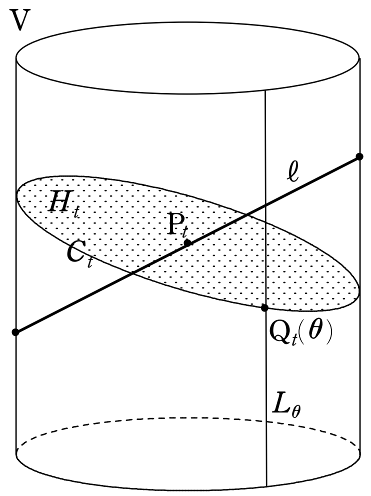
(2) ℓ を回転軸に持つ回転体で V に含まれるものを考える。このような回転体のうちで体積が最大となるものの体積を求めよ。

(1) V ： $\dfrac{x^2}{4}+y^2\leqq 1,\ |z|\leqq 6$ は，空間内における楕円柱である。

$\mathrm{A}(2,\ 0,\ 2),\ \mathrm{B}(-2,\ 0,\ -2)$ とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-4,\ 0,\ -4)\ //\ (1,\ 0,\ 1)$ である。

L_θ と H_t の交点を $\mathrm{Q}_t(\theta)$ とする。



$\mathrm{Q}_t(\theta)$ は L_θ 上の点であるから

$(2\cos\theta,\ \sin\theta,\ z)$ とおける。

$\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t(\theta)\perp\ell$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t(\theta)}\cdot(1,\ 0,\ 1)=\left(2\cos\theta-\frac{t}{\sqrt{2}},\ \sin\theta,\ z-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\cdot(1,\ 0,\ 1)=0$$

したがって

$$2\cos\theta-\frac{t}{\sqrt{2}}+z-\frac{t}{\sqrt{2}}=0 \quad より \quad z=\sqrt{2}t-2\cos\theta$$

(2) H_t 内で考えると，$\mathrm{Q}_t(\theta)$ で囲まれた曲線内における P_t を中心とする円が回転体の断面である。

そして，P_t を中心とする円の半径が最大のとき，回転体の体積が最大となる。

(1)の z に対し，$|t| \leqq 2\sqrt{2}$ より

$$|z| = |\sqrt{2}t - 2\cos\theta| \leqq \left|\sqrt{2}t\right| + 2|\cos\theta| \leqq \sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2} + 2 = 6$$

であるから，$\mathrm{Q}_t(\theta)$ は V に含まれる。

$\mathrm{Q}_t(\theta)$（$0 \leqq \theta < 2\pi$）全体を C_t とすると，C_t は V と H_t が交わる部分の境界である。

ℓ を回転軸とする回転体のうち，V に含まれるものを W とする。

W と H_t が交わる部分は，P_t を中心とする円板 D_t であり，

D_t は C_t で囲まれる H_t 内の領域に含まれる。

$d(t,\ \theta) = \left\{\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t(\theta)\right\}^2$ とすると

$$d(t,\ \theta) = \left(2\cos\theta - \frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + \sin^2\theta + \left(\frac{t}{\sqrt{2}} - 2\cos\theta\right)^2$$

$$= 8\cos^2\theta - 4\sqrt{2}t\cos\theta + t^2 + \sin^2\theta$$

$$= 7\cos^2\theta - 4\sqrt{2}t\cos\theta + t^2 + 1$$

$$= 7\left(\cos\theta - \frac{2\sqrt{2}}{7}t\right)^2 - \frac{1}{7}t^2 + 1$$

P_t を中心とする円の半径が最大のときを考えるので，半径が存在できる $d(t,\ \theta)$ の最小値を調べる。

θ が $0 \leqq \theta < 2\pi$ を動くとき，$d(t,\ \theta)$ の最小値を $m(t)$ とする。

$d(-t,\ \theta) = d(t,\ \theta + \pi)$ より $m(-t) = m(t)$ である。

これより $t \geqq 0$ において考えると，

$0 \leqq t \leqq \dfrac{7}{2\sqrt{2}}$ のとき $m(t) = -\dfrac{1}{7}t^2 + 1$

$\dfrac{7}{2\sqrt{2}} \leqq t \leqq 2\sqrt{2}$ のとき $m(t) = d(t,\ 0) = \left(2\sqrt{2} - t\right)^2$

（D_t の面積）$\leqq$ $\pi \cdot m(t)$ であり，

$\mathrm{OP}_t = t$ であることにも注意すると

W の体積の最大値は

$$\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \pi \cdot m(t)dt = 2\pi \int_0^{2\sqrt{2}} m(t)dt$$

$$= 2\pi \left\{ \int_0^{\frac{7}{2\sqrt{2}}} \left(-\frac{1}{7}t^2 + 1 \right) dt + \int_{\frac{7}{2\sqrt{2}}}^{2\sqrt{2}} \left(2\sqrt{2} - t \right)^2 dt \right\}$$

$$= 2\pi \left\{ \left[-\frac{1}{21}t^3 + t \right]_0^{\frac{7}{2\sqrt{2}}} + \left[\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2} - t \right)^3 \right]_{\frac{7}{2\sqrt{2}}}^{2\pi} \right\}$$

$$= 2\pi \left\{ -\frac{1}{21}\left(\frac{7}{2\sqrt{2}} \right)^3 + \frac{7}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^3 \right\}$$

$$= 2\pi \left(\frac{-49+1}{48\sqrt{2}} + \frac{7}{2\sqrt{2}} \right)$$

$$= 2\pi \cdot \frac{5}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{2}}\pi$$

[東京工業大学 2018 年前期 $\boxed{5}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

xyz 空間内の一辺の長さが1の立方体

$\{(x,\ y,\ z)\,|\,0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq z \leqq 1\}$

をQとする。

点Xは頂点A(0, 0, 0)から出発してQの辺上を1秒ごとに長さ1だけ進んで隣の頂点に移動する。

Xが x 軸，y 軸，z 軸と平行に進む確率はそれぞれ $p,\ q,\ r$ である。ただし

$p \geqq 0,\ \ q \geqq 0,\ \ r \geqq 0,\ \ p+q+r=1$

である。

Xが n 秒後にA(0, 0, 0), B(1, 1, 0), C(1, 0, 1), D(0, 1, 1)にある確率をそれぞれ $a_n,\ b_n,\ c_n,\ d_n$ とする。

(1) a_{n+2} を $a_n,\ b_n,\ c_n,\ d_n$ と $p,\ q,\ r$ を用いて表せ。

(2) $a_n - b_n + c_n - d_n$ を $p,\ q,\ r,\ n$ を用いて表せ。

(3) a_n を $p,\ q,\ r,\ n$ を用いて表せ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) 頂点A, B, C, Dを●，Qのその他頂点を○と表すものとする。

●と○はQ上で交互に並んでいるので，Xは偶数秒後に●，奇数秒後に○に移動する。

Xが $n+2$ 秒後にAにあるとき，n 秒後にはA, B, C, Dのいずれかにあるから

$$a_{n+2} = a_n \cdot p^2 + a_n \cdot q^2 + a_n \cdot r^2 + 2b_n \cdot pq + 2c_n \cdot pr + 2d_n \cdot qr$$

$$= (p^2+q^2+r^2)a_n + 2pqb_n + 2prc_n + 2qrd_n$$

(2) (1)と同様にして

$$b_{n+2} = 2pqa_n + (p^2+q^2+r^2)b_n + 2qrc_n + 2prd_n$$

$$c_{n+2} = 2pra_n + 2qrb_n + (p^2+q^2+r^2)c_n + 2pqd_n$$

$$d_{n+2} = 2qra_n + 2prb_n + 2pqc_n + (p^2+q^2+r^2)d_n$$

が得られる。

よって

$$a_{n+2}-b_{n+2}+c_{n+2}-d_{n+2}$$

$$=\left\{(p^2+q^2+r^2)a_n+2pqb_n+2prc_n+2qrd_n\right\}-\left\{2pqa_n+(p^2+q^2+r^2)b_n+2qrc_n+2prd_n\right\}$$

$$+\left\{2pra_n+2qrb_n+(p^2+q^2+r^2)c_n+2pqd_n\right\}-\left\{2qra_n+2prb_n+2pqc_n+(p^2+q^2+r^2)d_n\right\}$$

$$=(p^2+q^2+r^2)(a_n-b_n+c_n-d_n)$$

$$-2pq(a_n-b_n+c_n-d_n)+2pr(a_n-b_n+c_n-d_n)-2qr(a_n-b_n+c_n-d_n)$$

$$=(p^2+q^2+r^2-2pq+2pr-2qr)(a_n-b_n+c_n-d_n)$$

$$=(p-q+r)^2(a_n-b_n+c_n-d_n)$$

$$=(1-2q)^2(a_n-b_n+c_n-d_n)\quad（\because\ p+q+r=1）$$

ここで，$a_0=1,\ b_0=c_0=d_0=a_1=b_1=c_1=d_1=0$ であるから

$$a_n+b_n-c_n-d_n=\begin{cases}(1-2p)^n & (n:\text{偶数})\\ 0 & (n:\text{奇数})\end{cases}\quad\cdots①$$

(3) (2)と同様にして

$$a_{n+2}-b_{n+2}-c_{n+2}+d_{n+2}=(1-2p)^2(a_n-b_n-c_n+d_n)\ \text{より}$$

$$a_n-b_n-c_n+d_n=\begin{cases}(1-2p)^n & (n:\text{偶数})\\ 0 & (n:\text{奇数})\end{cases}\quad\cdots②$$

$$a_{n+2}+b_{n+2}-c_{n+2}-d_{n+2}=(1-2r)^2(a_n+b_n-c_n-d_n)\ \text{より}$$

$$a_n+b_n-c_n-d_n=\begin{cases}(1-2r)^n & (n:\text{偶数})\\ 0 & (n:\text{奇数})\end{cases}\quad\cdots③$$

また，全確率より $a_n+b_n+c_n+d_n=\begin{cases}1 & (n:\text{偶数})\\ 0 & (n:\text{奇数})\end{cases}\quad\cdots④$

①，②，③，④より $a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{4}\left\{(1-2p)^n+(1-2q)^n+(1-2r)^n+1\right\} & (n:\text{偶数})\\ 0 & (n:\text{奇数})\end{cases}$