[東京工業大学 2018 年前期 $\boxed{1}$]

a, b, c を実数とし，3 つの 2 次方程式

$$x^2+ax+1=0 \cdots\cdots ①,\quad x^2+bx+2=0 \cdots\cdots ②,\quad x^2+cx+3=0 \cdots\cdots ③$$

の解を複素数平面上で考察する。

(1) 2 つの方程式①, ②がいずれも実数解を持たないとき, それらの解はすべて同一円周上にあるか, またはすべて同一直線上にあることを示せ。また，それらの解がすべて同一円周上にあるとき，その円の中心と半径を a, b を用いて表せ。

(2) 3 つの方程式①，②，③がいずれも実数解を持たず，かつそれらの解がすべて同一円周上にあるための必要十分条件を a, b, c を用いて表せ。

[東京工業大学 2018 年前期 $\boxed{2}$]

☆ ☆

次の問いに答えよ。

(1) $35x+91y+65z=3$ を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ を一組求めよ。

(2) $35x+91y+65z=3$ を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の中で x^2+y^2 の値が最小となるもの，

およびその最小値を求めよ。

☆ ☆

[東京工業大学 2018 年前期 $\boxed{3}$]

方程式 $e^x(1-\sin x)=1$ について，次の問いに答えよ。

(1) この方程式は負の実数解を持たないことを示せ。また正の実数解を無限子持つことを示せ。

(2) この方程式の正の実数解を小さい方から順に並べて $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$ とし， $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ とおく。

このとき極限値 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}$ 求めよ。

[東京工業大学 2018 年前期 $\boxed{4}$]

☆——☆

xyz 空間内において，連立不等式

$$\frac{x^2}{4}+y^2 \leqq 1,\ |z| \leqq 6$$

により定まる領域をVとし，2 点$(2, 0, 2)$, $(-2, 0, -2)$を通る直線をℓとする。

(1) $|t| \leqq 2\sqrt{2}$ を満たす実数tに対し，点$P_t\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}}, 0, \dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)$を通り$\ell$に垂直な平面を$H_t$とする。

また，実数θに対し，点$(2\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$を通り$z$軸に平行な直線を$L_\theta$とする。

L_θとH_tとの交点のz座標をtとθを用いて表せ。

(2) ℓを回転軸に持つ回転体でVに含まれるものを考える。このような回転体のうちで体積が最大となるものの体積を求めよ。

☆——☆

[東京工業大学 2018 年前期 $\boxed{5}$]

☆ ☆

xyz 空間内の一辺の長さが1の立方体

$\{(x,\ y,\ z)\,|\,0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq z \leqq 1\}$

を Q とする。

点 X は頂点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 0)$ から出発して Q の辺上を1秒ごとに長さ1だけ進んで隣の頂点に移動する。

X が x 軸, y 軸, z 軸と平行に進む確率はそれぞれ $p,\ q,\ r$ である。ただし

$p \geqq 0,\ \ q \geqq 0,\ \ r \geqq 0,\ \ p+q+r=1$

である。

X が n 秒後に $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{B}(1,\ 1,\ 0),\ \mathrm{C}(1,\ 0,\ 1),\ \mathrm{D}(0,\ 1,\ 1)$ にある確率をそれぞれ $a_n,\ b_n,\ c_n,\ d_n$ とする。

(1) a_{n+2} を $a_n,\ b_n,\ c_n,\ d_n$ と $p,\ q,\ r$ を用いて表せ。

(2) $a_n - b_n + c_n - d_n$ を $p,\ q,\ r,\ n$ を用いて表せ。

(3) a_n を $p,\ q,\ r,\ n$ を用いて表せ。

☆ ☆