[東京工業大学 2018年前期 $\boxed{5}$]

xyz 空間内の一辺の長さが1の立方体

$\{(x,\ y,\ z)\,|\,0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1,\ 0\leqq z\leqq 1\}$

をQとする。

点Xは頂点A(0, 0, 0)から出発してQの辺上を1秒ごとに長さ1だけ進んで隣の頂点に移動する。

Xが x 軸，y 軸，z 軸と平行に進む確率はそれぞれ $p,\ q,\ r$ である。ただし

$p\geqq 0,\ \ q\geqq 0,\ \ r\geqq 0,\ \ p+q+r=1$

である。

Xが n 秒後にA(0, 0, 0), B(1, 1, 0), C(1, 0, 1), D(0, 1, 1)にある確率をそれぞれ $a_n,\ b_n,\ c_n,\ d_n$ とする。

(1) a_{n+2} を $a_n,\ b_n,\ c_n,\ d_n$ と $p,\ q,\ r$ を用いて表せ。

(2) $a_n-b_n+c_n-d_n$ を $p,\ q,\ r,\ n$ を用いて表せ。

(3) a_n を $p,\ q,\ r,\ n$ を用いて表せ。

---

(1) 頂点A, B, C, Dを●，Qのその他頂点を○と表すものとする。

●と○はQ上で交互に並んでいるので，Xは偶数秒後に●，奇数秒後に○に移動する。

Xが $n+2$ 秒後にAにあるとき，n 秒後にはA, B, C, Dのいずれかにあるから

$$a_{n+2}=a_n\cdot p^2+a_n\cdot q^2+a_n\cdot r^2+2b_n\cdot pq+2c_n\cdot pr+2d_n\cdot qr$$

$$=(p^2+q^2+r^2)a_n+2pqb_n+2prc_n+2qrd_n$$

(2) (1)と同様にして

$$b_{n+2}=2pqa_n+(p^2+q^2+r^2)b_n+2qrc_n+2prd_n$$

$$c_{n+2}=2pra_n+2qrb_n+(p^2+q^2+r^2)c_n+2pqd_n$$

$$d_{n+2}=2qra_n+2prb_n+2pqc_n+(p^2+q^2+r^2)d_n$$

が得られる。

よって

$$a_{n+2}-b_{n+2}+c_{n+2}-d_{n+2}$$

$$=\left\{(p^2+q^2+r^2)a_n+2pqb_n+2prc_n+2qrd_n\right\}-\left\{2pqa_n+(p^2+q^2+r^2)b_n+2qrc_n+2prd_n\right\}$$

$$+\left\{2pra_n+2qrb_n+(p^2+q^2+r^2)c_n+2pqd_n\right\}-\left\{2qra_n+2prb_n+2pqc_n+(p^2+q^2+r^2)d_n\right\}$$

$$=(p^2+q^2+r^2)(a_n-b_n+c_n-d_n)$$

$$-2pq(a_n-b_n+c_n-d_n)+2pr(a_n-b_n+c_n-d_n)-2qr(a_n-b_n+c_n-d_n)$$

$$=(p^2+q^2+r^2-2pq+2pr-2qr)(a_n-b_n+c_n-d_n)$$

$$=(p-q+r)^2(a_n-b_n+c_n-d_n)$$

$$=(1-2q)^2(a_n-b_n+c_n-d_n)\quad (\because\ p+q+r=1)$$

ここで，$a_0=1,\ b_0=c_0=d_0=a_1=b_1=c_1=d_1=0$ であるから

$$a_n+b_n-c_n-d_n=\begin{cases}(1-2p)^n & (n:\text{偶数})\\ 0 & (n:\text{奇数})\end{cases}\quad\cdots①$$

(3) (2)と同様にして

$$a_{n+2}-b_{n+2}-c_{n+2}+d_{n+2}=(1-2p)^2(a_n-b_n-c_n+d_n)$$ より

$$a_n-b_n-c_n+d_n=\begin{cases}(1-2p)^n & (n:\text{偶数})\\ 0 & (n:\text{奇数})\end{cases}\quad\cdots②$$

$$a_{n+2}+b_{n+2}-c_{n+2}-d_{n+2}=(1-2r)^2(a_n+b_n-c_n-d_n)$$ より

$$a_n+b_n-c_n-d_n=\begin{cases}(1-2r)^n & (n:\text{偶数})\\ 0 & (n:\text{奇数})\end{cases}\quad\cdots③$$

また，全確率より $a_n+b_n+c_n+d_n=\begin{cases}1 & (n:\text{偶数})\\ 0 & (n:\text{奇数})\end{cases}\quad\cdots④$

①，②，③，④より $a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{4}\left\{(1-2p)^n+(1-2q)^n+(1-2r)^n+1\right\} & (n:\text{偶数})\\ 0 & (n:\text{奇数})\end{cases}$