[東京工業大学 2018 年前期 $\boxed{4}$]

☆ ☆

xyz 空間内において，連立不等式

$$\frac{x^2}{4}+y^2 \leqq 1,\ |z| \leqq 6$$

により定まる領域を V とし，2 点 $(2,\ 0,\ 2)$, $(-2,\ 0,\ -2)$ を通る直線を ℓ とする。

(1) $|t| \leqq 2\sqrt{2}$ を満たす実数 t に対し，点 $P_t\left(\frac{t}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$ を通り ℓ に垂直な平面を H_t とする。

また，実数 θ に対し，点 $(2\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ を通り z 軸に平行な直線を L_θ とする。

L_θ と H_t との交点の z 座標を t と θ を用いて表せ。

(2) ℓ を回転軸に持つ回転体で V に含まれるものを考える。このような回転体のうちで体積が最大となるものの体積を求めよ。

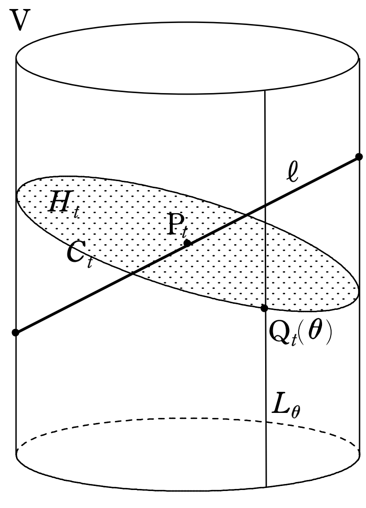
☆ ☆

(1) V ： $\frac{x^2}{4}+y^2 \leqq 1,\ |z| \leqq 6$ は，空間内における楕円柱である。

$\mathrm{A}(2,\ 0,\ 2)$, $\mathrm{B}(-2,\ 0,\ -2)$ とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-4,\ 0,\ -4)\ //\ (1,\ 0,\ 1)$ である。

L_θ と H_t の交点を $\mathrm{Q}_t(\theta)$ とする。



$\mathrm{Q}_t(\theta)$ は L_θ 上の点であるから

$(2\cos\theta,\ \sin\theta,\ z)$ とおける。

$\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t(\theta) \perp \ell$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t(\theta)}\cdot(1,\ 0,\ 1)=\left(2\cos\theta-\frac{t}{\sqrt{2}},\ \sin\theta,\ z-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\cdot(1,\ 0,\ 1)=0$$

したがって

$$2\cos\theta-\frac{t}{\sqrt{2}}+z-\frac{t}{\sqrt{2}}=0 \text{ より } z=\sqrt{2}t-2\cos\theta$$

（2）H_t 内で考えると，$\mathrm{Q}_t(\theta)$ で囲まれた曲線内における P_t を中心とする円が回転体の断面である。

そして，P_t を中心とする円の半径が最大のとき，回転体の体積が最大となる。

(1)の z に対し，$|t| \leqq 2\sqrt{2}$ より

$$|z| = |\sqrt{2}t - 2\cos\theta| \leqq \left|\sqrt{2}t\right| + 2\left|\cos\theta\right| \leqq \sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2} + 2 = 6$$

であるから，$\mathrm{Q}_t(\theta)$ は V に含まれる。

$\mathrm{Q}_t(\theta)$（$0 \leqq \theta < 2\pi$）全体を C_t とすると，C_t は V と H_t が交わる部分の境界である。

ℓ を回転軸とする回転体のうち，V に含まれるものを W とする。

W と H_t が交わる部分は，P_t を中心とする円板 D_t であり，

D_t は C_t で囲まれる H_t 内の領域に含まれる。

$d(t,\ \theta) = \left\{\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t(\theta)\right\}^2$ とすると

$$d(t,\ \theta) = \left(2\cos\theta - \frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + \sin^2\theta + \left(\frac{t}{\sqrt{2}} - 2\cos\theta\right)^2$$

$$= 8\cos^2\theta - 4\sqrt{2}t\cos\theta + t^2 + \sin^2\theta$$

$$= 7\cos^2\theta - 4\sqrt{2}t\cos\theta + t^2 + 1$$

$$= 7\left(\cos\theta - \frac{2\sqrt{2}}{7}t\right)^2 - \frac{1}{7}t^2 + 1$$

P_t を中心とする円の半径が最大のときを考えるので，半径が存在できる $d(t,\ \theta)$ の最小値を調べる。

θ が $0 \leqq \theta < 2\pi$ を動くとき，$d(t,\ \theta)$ の最小値を $m(t)$ とする。

$d(-t,\ \theta) = d(t,\ \theta + \pi)$ より $m(-t) = m(t)$ である。

これより $t \geqq 0$ において考えると，

$0 \leqq t \leqq \dfrac{7}{2\sqrt{2}}$ のとき $m(t) = -\dfrac{1}{7}t^2 + 1$

$\dfrac{7}{2\sqrt{2}} \leqq t \leqq 2\sqrt{2}$ のとき $m(t) = d(t,\ 0) = \left(2\sqrt{2} - t\right)^2$

（D_t の面積）$\leqq$ $\pi \cdot m(t)$ であり，

$\mathrm{OP}_t = t$ であることにも注意すると

W の体積の最大値は

$$\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \pi \cdot m(t)dt = 2\pi \int_{0}^{2\sqrt{2}} m(t)dt$$

$$= 2\pi \left\{ \int_{0}^{\frac{7}{2\sqrt{2}}} \left(-\frac{1}{7}t^2 + 1 \right) dt + \int_{\frac{7}{2\sqrt{2}}}^{2\sqrt{2}} \left(2\sqrt{2} - t \right)^2 dt \right\}$$

$$= 2\pi \left\{ \left[-\frac{1}{21}t^3 + t \right]_{0}^{\frac{7}{2\sqrt{2}}} + \left[\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2} - t \right)^3 \right]_{\frac{7}{2\sqrt{2}}}^{2\pi} \right\}$$

$$= 2\pi \left\{ -\frac{1}{21}\left(\frac{7}{2\sqrt{2}} \right)^3 + \frac{7}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^3 \right\}$$

$$= 2\pi \left(\frac{-49+1}{48\sqrt{2}} + \frac{7}{2\sqrt{2}} \right)$$

$$= 2\pi \cdot \frac{5}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{2}}\pi$$