[東京工業大学 2018 年前期 $\boxed{3}$]

☆――――――――――――――――――――☆

方程式 $e^x(1-\sin x)=1$ について，次の問いに答えよ。

（1）この方程式は負の実数解を持たないことを示せ。また正の実数解を無限子持つことを示せ。

（2）この方程式の正の実数解を小さい方から順に並べて $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$ とし， $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ とおく。

このとき極限値 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n^2}$ 求めよ。

☆――――――――――――――――――――☆

（1） $f(x)=e^x(1-\sin x)-1$ とおく。

$$\begin{aligned}f'(x)&=e^x(1-\sin x)+e^x(-\cos x)\\&=e^x(1-\sin x-\cos x)\\&=e^x\left\{1-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\}\end{aligned}$$

であり， $f'(x)=0$ となるのは $x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}+2n\pi$ すなわち $x=2n\pi$ （n は整数）

または $x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3}{4}\pi+2n\pi$ すなわち $x=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$ （n は整数）

のときである。

ここで， $2n\pi<x<\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$ のとき $f'(x)<0$， $\dfrac{\pi}{2}+2n\pi<x<2\pi+2n\pi$ のとき $f'(x)>0$

であるから， $f(x)$ は $x=2n\pi$ で極大値， $x=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$ で極小値をとる。

$f\left(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)=-1$ であり，

n が負の整数のとき，各極大値について $f(2n\pi)=e^{2n\pi}-1<0$ であるから

$f(x)=0$ は，負の実数解をもたない。

n が正の整数のとき，各極大値 $f(2n\pi)=e^{2n\pi}-1>0$ であるから

$f(x)=0$ は， $2n\pi<x<\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$ に 1 つ …①,

$\dfrac{\pi}{2}+2n\pi<x<2\pi+2n\pi$ に 1 つ …②

実数解をもつ。

よって，正の実数解を無限個もつ。

(2) ①，②の解 $x=a_n$ は交互に現れ， $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，

②より $\dfrac{\pi}{2}+2(k-1)\pi<a_{2k-1}<2\pi+2(k-1)\pi$，①より $2k\pi<a_{2k}<\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ の範囲にある。

これらをまとめて表すと

$$\frac{\pi}{2}\left\{2n-\frac{1+(-1)^{n-1}}{2}\right\}<a_n<\frac{\pi}{2}\left\{2(n+1)-\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

となる。

よって，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{2}\left\{2k-\frac{1+(-1)^{k-1}}{2}\right\}<S_n<\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{2}\left\{2(k+1)-\frac{1+(-1)^{k}}{2}\right\}$$

$$\frac{\pi}{2}\left\{n^2+n-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)}\right\}<S_n<\frac{\pi}{2}\left\{n^2+n+2n-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}\cdot\frac{-1-(-1)^n}{1-(-1)}\right\}$$

$$\frac{\pi}{2}\left\{n^2+\frac{1}{2}n-\frac{1-(-1)^n}{4}\right\}<S_n<\frac{\pi}{2}\left\{n^2+\frac{5}{2}n+\frac{1+(-1)^n}{4}\right\}$$

辺々を n^2 で割って

$$\frac{\pi}{2}\left\{1+\frac{1}{2n}-\frac{1-(-1)^n}{4n^2}\right\}<\frac{S_n}{n^2}<\frac{\pi}{2}\left\{1+\frac{5}{2n}+\frac{1+(-1)^n}{4n^2}\right\}$$

ここで，左辺と右辺は共に $\dfrac{\pi}{2}$ に収束するので，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=\frac{\pi}{2}$$