

[東京工業大学 2018 年前期 2]



次の問いに答えよ。

- (1) $35x+91y+65z=3$ を満たす整数の組 (x, y, z) を一組求めよ。
- (2) $35x+91y+65z=3$ を満たす整数の組 (x, y, z) の中で x^2+y^2 の値が最小となるもの、
およびその最小値を求めよ。



(1) $35x+91y+65z=3 \Leftrightarrow 7(5x+13y)+65z=3$

$w=5x+13y$ とおくと $7w+65z=3$

これを満たす整数 w, z として、 $w=19, z=-2$ がある。

このとき $5x+13y=19$ であり、これを満たす整数 x, y として $x=-4, y=3$ がある。

したがって、題意を満たす整数の組の 1 つとして $(x, y, z)=(-4, 3, -2)$ がある。

(2) $35x+91y+65z=3 \cdots \textcircled{1}$

$35 \cdot (-4) + 91 \cdot 3 + 65 \cdot (-2) = 3 \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$ から $\textcircled{2}$ を引いて $35(x+4)+91(y-3)+65(z+2)=0 \cdots \textcircled{3}$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} &\Leftrightarrow 35(x+4) = -91(y-3) - 65(z+2) \\ &= -13\{7(y-3)+5(z+2)\} \end{aligned}$$

であり、35 と 13 は互いに素であるから $x+4=13m$ (m は整数) と表せる。

すなわち、 $x=13m-4$

また、 $\textcircled{3} \Leftrightarrow 91(y-3) = -35(x+4) - 65(z+2)$
 $= -5\{7(x+4)+13(z+2)\}$

であり、91 と 5 は互いに素であるから $y-3=5n$ (n は整数) と表せる。

すなわち、 $y=5n+3$

$x^2+y^2=(13m-4)^2+(5n+3)^2$ が最小となるのは

x, y が整数であることに注意して $m=0, n=-1$ のときであり、

このとき $x=-4, y=-2$ であるが、

$$\textcircled{1}\text{より } 35 \cdot (-4) + 91 \cdot (-2) + 65z = 3 \Leftrightarrow 65z = 325 \Leftrightarrow z = 5$$

となり、 z も整数になる。

以上より、求める $x^2 + y^2$ の値が最小となるのは $(x, y, z) = (-4, -2, 5)$ のときであり、

$$\text{その値は } (-4)^2 + (-2)^2 = 20$$